< 30번에 대한 질의/응답 >

질문 : 조건 (다)에서 함수 $g(x)$의 극값의 수가 함수 $f(x)$의 극값보다 작다고 할 때, 함수 $f(x)$가 조건 (나)에서 극댓값 2개를 갖는다고 했으므로 반드시 극솟값 하나는 가져야 하므로 최소 3개가 있는 것은 밝힐 수 있는데, 함수 $f(x)$의 극값이 더 있을 수 있는 것은 아닌가?

답변 : 네 맞습니다. 논리적으로 타당한 의문입니다. 다만 이 경우에는 조건 (가)와 (나)를 이용하여 함수 $g'(x)$의 개형을 추론하고 나서 $x$축의 위치를 결정할 수 없음도 알 수 있습니다. 이와 같은 상황에서 시험을 볼 때 해결할 수 있는 방법은 다음과 같습니다.

문제가 묻고 있는 것은 $M$의 최솟값을 묻고 있으며 $M>0$ 이라는 조건도 주어졌으므로 함수 $f(x)$가 극값을 4개 이상 갖고 있다는 것을 증명할 수 없다면 그러한 가능성은 제외해두고 문제를 해결하는 것이 일종의 '지혜'입니다. 주어진 문제를 완벽하게 파악하고 문제를 해결하면 가장 이상적이지만 때로는 정확하게 알고 있는 것을 종합하여 결론을 내릴 수도 있어야 합니다.

출제진도 이런 의문을 감안하여 $f(x)$의 극솟값에 대해서는 별다른 조건을 명시하지 않았고 ( 또한 만약 $f(x)$의 극솟값에 대한 조건을 명시하면 문제를 해결하는 방법을 고려함에 있어서 불필요한 고민을 수험생은 해야 하는 문제도 있습니다. ) $M>0$라는 조건도 최솟값을 구해야 하기 때문이기도 하지만 실제 문제를 풀어가는 과정에서 생길 수 있는 혼선을 최대한 줄이기 위한 목적에서 주어진 것으로 보입니다.

그럼에도 불구하고 여전히 의문이 해결되지 않는다면 당연히 해결은 해야 합니다. 주어진 식을 변형하여 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}$을 얻고 $f'(x)=\dfrac{g'(x)(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$을 얻습니다. 문제는 $f(x)$가 극값을 최대로 갖는다면 4개 이상이 될 수 있는가를 판단하는 것입니다.

여기서 $h(x)=g'(x)(x-a)-g(x)$라고 두면 일단 조건 (나)에서 $f(x)$가 극댓값 2개는 갖는다는 것을 통해서 $\alpha<c<\beta$를 만족하는 $c$에서 극솟값은 존재합니다. 그런데 $f'(x)$에서 분자의 식 $h(x)=g'(x)(x-a)-g(x)$는 4차 함수입니다. 즉 $h(x)=0$을 만족하는 서로 다른 실근은 최대 4개까지 있을 수 있습니다. 이중에 세 실근은 $\alpha\,,\,c\,,\,\beta$입니다. 따라서 다른 하나의 근은 실근이며 ( 계수가 모두 실수이므로 ) 이 실근을 $d$라고 하면 $d<\alpha$입니다. 왜냐하면 $h(x)$ 최고차항이 $-3$인 4차식이고 $\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ ( $\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$ ). 문제에서 주어진 조건에서 $a<\alpha$.

충분히 작은 양수 $h$에 대하여 $g'(a+h)>0$, $g(a+h)<0$이므로 ( $M>0$이므로 ) $f'(a+h)=\dfrac{g'(a+h)(h)-g(a+h)}{h^2}>0$ 이므로 $d<a$이며, 따라서 $f(x)$는 $x>a$에서 극댓값 2개와 극솟값 1개를 갖습니다.

사실 시험을 볼 때 이와 같은 의문을 갖는 것은 시험제도를 떠나서 생각한다면 바람직한 것이긴 합니다. 만약에 논술 시험이라면 이와 같은 의문까지 정확하게 밝힐 수 있다면 좋은 결과를 얻긴 할 것입니다. 어떤 면에서는 이런 점은 일종의 제도 자체의 모순인 면도 있습니다.

따라서 수능'만'을 기준으로 판단한다면 이런 수준의 의문은 문제가 제시하고 있는 조건과 답이 결정되기 위한 상황을 고려하여 확실하게 밝힌 수준에서 ( 즉 극값이 2개가 존재한다는 것은 밝혀져 있고 나머지에 대해서는 판단이 잘 안된다면 그 조건에서 ) $g(x)$의 극값이 3개가 존재하면 안 된다고 해결하는 것이 바람직하다고 생각됩니다.

참고 : 이 문항에서 가장 중요한 것은 문제접근이 $f(x)$에 대하여 주어진 정보를 바탕으로 함수 $g(x)$을 추론한다는 것입니다. 문제에서 묻고 있는 것은 $M$의 최솟값인데 이때 $M$은 두 가지 관점에서 파악할 수 있습니다.

조건 (나)에서 직접적으로 파악 가능한 $f(\alpha)=f(\beta)=M$과 조건 (가)와 (나)로부터 유도 가능한 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$입니다.

즉 문제가 묻고 있는 것을 $f(x)$의 함숫값의 최솟값이라고 파악할 것인가? 아니면 $g(x)$의 접선의 기울기의 최솟값이라고 파악할 것인가? 하는 것입니다.

일단 전자의 생각은 너무 순진한 생각입니다. 아무리 수능 난이도가 낮아진 상태라고 하지만 ( 시험 전에는 실제 결과보다도 쉬울 것으로 예측되고 있는 상황이기도 했고 ) $f(\alpha)=f(\beta)=M$라는 관점에서 문제를 해결하려고 했다면 3점 문항으로도 적합하지 않다고 보아야 할 것입니다.

즉, '굳이' (가)조건을 변형하여 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}$로 보고 문제를 해결하려는 시도는 우선 $M$을 $f(x)$의 함숫값으로 보고 그 최솟값을 구하려는 것에 다름이 아닙니다. 이렇게 되면 문제해결에 혼란이 불가피한 면이 발생합니다.

아마도 이렇게 파악할 경우에 조건(나)에서 단순한 함숫값이 아니라 극댓값이라고 했기 때문에 $f'(x)=\dfrac{g'(x)(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$를 구하게 될 것입니다. 그런데 이 식으로부터 얻을 수 있는 정보가 많지 않습니다. 이 식으로부터 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$를 얻었다고 해도 ( 그 과정도 시험을 보는 조건에서는 쉽지 않을 수 있습니다. 왜냐하면 문제의 핵심이 함수 $f(x)$의 개형을 파악하는 것이라고 보고 있는 상태이기 때문입니다. ) $g'(x)-M=-4(x-\alpha)(x-\beta)(x-k)$ 라는 식 이상은 얻을 수 없기 때문입니다. 이렇게 접근하려고 해도 문제해결이 불가능한 것은 아니지만 계산량을 가늠하기 어렵게 됩니다.

즉 '계산'에 의해서 $f'(x)$의 개형에 대해서 추론하는 것이 매우 복잡해지기 때문에 (다) 조건의 해석을 이제는 최고차항의 계수가 $-1$인 사차함수 $g(x)$의 가능한 여러 가지 개형에 대해서 파악하려고 할 수 밖에 없습니다. 그렇게 해서 $(\alpha, g(\alpha))$, $(\beta, g(\beta))$에서의 공통접선의 기울기가 $M$이고 그 공통접선이 $(a, 0)$을 지나며 $f(x)$는 $(a, 0)$과 $(x, g(x))$를 잇는 직선의 기울기를 의미한다고 해석해도 혼선에서 벗어나기가 쉽지 않게 됩니다. 왜냐하면 (다) 조건을 해석하여 $M$이 최소가 될 때를 추론해야 하기 때문입니다.

이런 저런 혼선을 거쳐서 문제를 해결하려면 결국에는 $M$의 최솟값을 함수 $g(x)$를 이용하여 구해야 한다는 것으로 '돌아와야' 됩니다. 거듭 강조하지만 이렇게라도 문제를 해결하는 것도 필요하긴 합니다. 그런데 이런 해결은 말 그대로 문제를 끝까지 포기하지 않고 이렇게도 해보고 저렇게도 해보는 '의지'의 문제가 더 큰 것입니다. 애초에 문제에 대한 접근 자체를 잘못했기 때문에 생기는 불필요한 혼선이고, 결국은 스스로 체감 난이도를 잔뜩 높이고 마는 결과가 될 가능성만 큽니다.

처음부터 문제를 일단 있는 그대로 파악하고 조건(가)와 (나)를 해석하여 $g'(\alpha) = g'(\beta) = M$를 얻고 이제 $g(x)$또는 $g'(x)$의 개형을 이용하여 $M$의 최솟값을 구하라는 문제로 파악했다면 조건(다) 역시 이미 문제에서 최소 2개의 극값이 존재한다고 명시되어 있기 때문에 설령 4개 이상 존재하지 않을까 하는 의문이 들었다고 해도 어렵지 않기 확인 가능한 것이며 설령 그 가능성에 대해서 판단하지 못했다고 해도 문제의 정답을 맞히는 것은 30번 문항임을 감안하면 어렵다고 할 수는 없을 것입니다.