1.	④	11.	②	21.	34
2.	①	12.	⑤	22.	94
3.	②	13.	②	23.	②
4.	⑤	14.	③	24.	③
5.	③	15.	③	25.	④
6.	④	16.	2	26.	①
7.	③	17.	10	27.	①
8.	②	18.	9	28.	⑤
9.	⑤	19.	110	29.	9
10.	①	20.	383	30.	2

#1. $\dfrac{a^8+a^{-4}}{a^4+1}=\dfrac{3}{2}$

답: ④

#2. $f(x) = (x^3+1)(x^3-1) = x^6-1$이므로

$f'(x) = 6x^5$

따라서, $f'(2) = 192$

답: ①

#3. $\begin{cases} 2(b+1)=(a-1)+(3b+1) \\ (a-1)^2=b(2-b) \end{cases}$

을 연립하면 $a=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(복부호동순)

이므로 $ab=\dfrac{1}{2}$이다.

$cf)$ a와 b를 두 실근으로 갖는 t에 대한 방정식이

$2t^2-4t+1=0$이므로

근과 계수의 관계를 이용하여 $ab=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

답: ②

#4. $\lim_{x \to 1-} f(f(x^2)) = \lim_{x \to 1+} f(f(x)) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 5-} f(f(x-4)) = \lim_{x \to 1-} f(f(x)) = \lim_{x \to -1+} f(x) = 1$

이므로 더하면 2

답: ⑤

#5. 함수 $y=2^{x-3}+5$를 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$$y=\log_2(x-5)+3$$

이 함수를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$y=\log_2(x-8)+1$$이다.

$f(x)=\log_2(x-8)+1$이므로 $f(12)=3$이다.

답: ③

#6.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$=\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{13}{6}$이다.

$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$이고, $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{17}{13}$

답: ④

#7. 함수 $y=x^3-2x^2+2x$의 그래프와
직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 2배하면
$$2\times\int_0^1\left|(x^3-2x^2+2x)-x\right|dx=2\int_0^1 x(x-1)^2dx=\frac{1}{6}$$

답: ③

#8.

$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-12}{x-3} = 18$, $f(3)=12$, $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-3}{x-1} = 9$, $g(1)=3$

$\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(g(x))-12}{x-1} \times \frac{1}{(x^2+x+1)} \right\} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 1} \frac{f(g(x))-12}{x-1}$ 에서

$g(x)=t$로 치환하면

$\frac{1}{3} \times \lim_{t \to 3} \frac{f(t)-12}{t-3} \times \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-3}{x-1} = 54$이다.

답: ②

#9.

$\lim_{x \to -1-} f(x)f(-2-x) = (a-3)(b-7)$

$f(-1) \times f(-1) = (a-3)^2$

$\lim_{x \to -1+} f(x)f(-2-x) = (a-3)(b-7)$

함수 $f(x)f(-2-x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$(a-3)^2 = (a-3)(b-7)$이므로

$a=3$ 또는 $b=a+4$

a와 b가 10 이하의 자연수이므로

순서쌍 (a, b)의 개수는 15

답: ⑤

#10. 함수 $f(x)=x^m g(x)$ (m은 자연수, $g(0)\neq 0$)이라 하자.

$f'(x)=mx^{m-1}g(x)+x^m g'(x)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^m g(x)+x^{m+1}g'(x)}{x^m g(x)}=m=n$$

따라서, 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=x^n g(x)$를 만족한다.

$a_n+b_n=5$를 만족시키는 순서쌍 (a_n, b_n)을 모두 구하면

$n=1$일 때 $\begin{cases}(3,\ 2)\\(4,\ 1)\\(5,\ 0)\end{cases}$, $n=2$일 때 $\begin{cases}(3,\ 2)\\(4,\ 1)\end{cases}$, $n=3$일 때 $\begin{cases}(4,\ 1)\\(5,\ 0)\end{cases}$,

$n=4$일 때 $\{\ (4,\ 1)$, $n=5$일 때 $\{\ (5,\ 0)$

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n-b_n)$의 최솟값은 13이다.

답: ①

#11. $\overline{BF}=\overline{CE}$이므로

삼각형 ACE의 넓이가 삼각형 BDF의 넓이의 3배가 되려면

$$3\overline{DF}=\overline{EA}$$

$\overline{DF}=\log_k\beta-\log_k\alpha$, $\overline{EA}=\log_2\beta-\log_2\alpha$이므로

$\log_2 k=3$이다. 따라서, $k=8$

답: ②

#12. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,1)$에 점대칭이고

반원이 y축에 선대칭이므로 선분 BD가 x축에 평행하다.

그러므로, 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 점 B와 점 D에서 만난다.

$B(-\sqrt{3},1)$, $D(\sqrt{3},1)$

점 B와 점 D의 중점을 M이라 하면 삼각형 BOM에서

$\angle M=90^\circ$, $\overline{BM}=\sqrt{3}$, $\overline{OM}=1$이므로 $\angle BOM=60^\circ$이다.

$\angle BOD=120^\circ$이므로 $\angle BCD=120^\circ$

따라서, ㄱ은 **참**이다.

반원 위의 점 $(-1,\sqrt{3})$을 C', 점 $(0,2)$를 C''이라 할 때,

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대임을 이용하면

$\angle BOC' < \angle BOC < \angle BOC''$이다.

$\angle BOC'=30^\circ$, $\angle BOC''=60^\circ$이므로

$30^\circ < \angle BOC < 60^\circ$이다.

따라서, ㄴ은 **참**이다.

(사각형 $ABC'D$의 넓이)$<$(사각형 $ABCD$의 넓이)$<$(사각형 $ABC''D$의 넓이)

(사각형 $ABC'D$의 넓이)$=3$, (사각형 $ABC''D$의 넓이)$=2\sqrt{3}$이므로

$3<$(사각형 $ABCD$의 넓이)$<2\sqrt{3}$이다.

따라서, ㄷ은 **참**이다.

답: ⑤

#13. $a_1=a$라 하면 (나) 조건에서

$a_1=a,\ a_2=0,\ a_3=-a,\ a_4=-a,\ a_5=0,\ a_6=a$

$a_7=a,\ a_8=0,\ a_9=-a,\ a_{10}=-a,\ a_{11}=0,\ a_{12}=a$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 주기가 6이다.

따라서, 자연수 m과 n에 대하여 $a_n=\sin(pn+q)$에서

$$\begin{cases} p=(2m-\frac{1}{3})\pi \\ q=(n-\frac{1}{3})\pi \end{cases} \text{또는} \begin{cases} p=(2m-\frac{5}{3})\pi \\ q=(n-\frac{2}{3})\pi \end{cases}$$

$0\le p+q<6\pi$이므로 실수 p의 최댓값은 $\frac{13}{3}\pi$이다.

답: ②

#14. 조건 (나)에서 d는 양수이다.

ⅰ) $f(1)-f(0)=d$일 때, $f(2)-f(1)=\frac{1}{2}d$

조건 (나)에서 $\{f(1)-f(\alpha)\}+\{f(2)-f(\alpha)\}=d$이므로

$f(1)-f(\alpha)=\frac{1}{4}d,\ f(2)-f(\alpha)=\frac{3}{4}d$이다.

$f(2)-f(3)=d$를 이용하여 계산하면

$f(0)-f(\alpha)=-\frac{3}{4}d,\ f(3)-f(\alpha)=-\frac{1}{4}d$

따라서, $|f(0)+f(3)-2f(\alpha)|=d$

ⅱ) $f(1)-f(0)=-d$일 때, $f(2)-f(1)=-\frac{1}{2}d$

조건 (나)에서 $\{f(1)-f(\alpha)\}+\{f(2)-f(\alpha)\}=-d$이므로

$f(1)-f(\alpha)=-\frac{1}{4}d,\ f(2)-f(\alpha)=-\frac{3}{4}d$이다.

$f(2)-f(3)=-d$를 이용하여 계산하면

$f(0)-f(\alpha)=\frac{3}{4}d,\ f(3)-f(\alpha)=\frac{1}{4}d$

따라서, $|f(0)+f(3)-2f(\alpha)|=d$

$\therefore\ k=8$

답: ③

#15.

$a_3=\dfrac{a_1a_2}{2}=1$인 경우는 다음과 같다.

ⅰ) $a_1=2$, $a_2=1$일 때,

$a_3=1$, $a_4=0$, $a_5=-1$, $a_6=0$

ⅱ) $a_1=-2$, $a_2=-1$일 때,

$a_3=1$, $a_4=-4$, $a_5=-5$, $a_6=10$

두 경우 모두 $a_2-a_6\neq3$이므로 문제 조건에 맞지 않다.

$a_3=2a_1+a_2-3=1$인 경우는 다음과 같다.

$a_1=k$라 하면 $a_2=4-2k$

$a_3=1$이므로 $a_4=2-k$, $a_5=1-k$, $a_6=2-3k$

$a_2-a_6=(4-2k)-(2-3k)=3$에서 $k=1$

따라서, $a_1=1$이다.

답: ③

#16. $(\log_m 8)^2 = (\log_8 m) \times \left\{(\log_m 8)^2 + 6\log_m 8\right\}$

$= \log_m 8 + 6$에서

$(\log_m 8 - 3)(\log_m 8 + 2) = 0$

$m > 1$이므로 $\log_m 8 = 3$이다. 따라서, $m = 2$

답: 2

#17. $\int_{2}^{3} \frac{(x^3-x^2+6x)-(2x^2+3x+1)}{x-1}dx = \int_{2}^{3} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}dx$

$= \int_{2}^{3}(x-1)^2 dx = \frac{7}{3}$ 이다.

따라서, $p+q=10$ 이다.

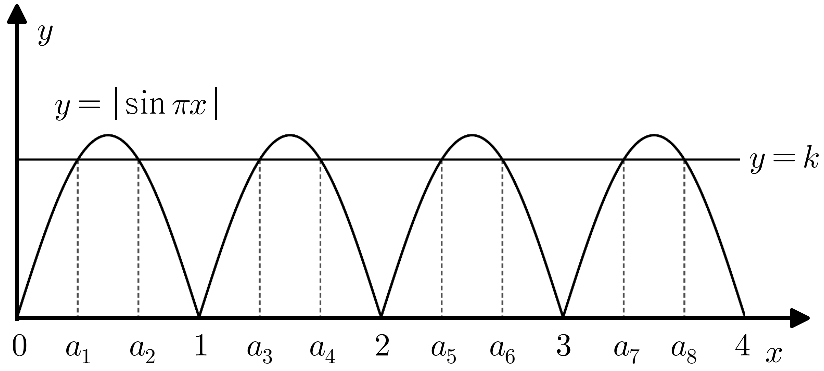
답: 10

#18. 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{9}{2}} |t^2-3t|\,dt = \int_0^3 (-t^2+3t)\,dt + \int_3^{\frac{9}{2}} (t^2-3t)\,dt = 9$$

답: 9

#19. $y=|\sin\pi x|$의 그래프와 직선 $y=k$를 그리면



함수 $|\sin\pi x|$의 주기가 1이므로 $a_2=2-a_3$, $a_6=4-a_3$

$\therefore$ ${a_3}^2=(2-a_3)(4-a_3)$에서 $a_3=\dfrac{4}{3}$

$a_7=a_3+2=\dfrac{10}{3}$이므로 $33a_7=110$

답: 110

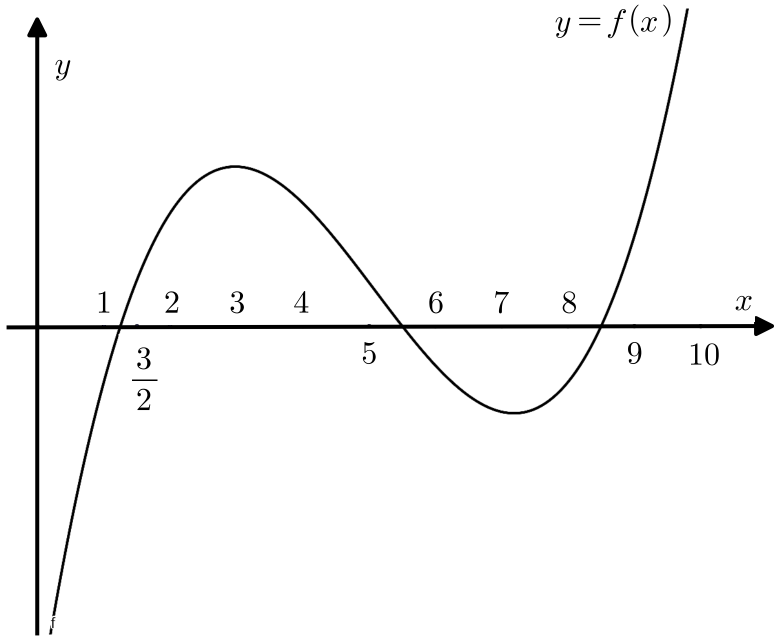
#20. 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{n}^{a_n} |f(x)|dx = \left| \int_{n}^{a_n} f(x)dx \right|$$

를 만족하려면 열린구간 (n, a_n)에서

$|f(x)| = f(x)$ 또는 $|f(x)| = -f(x)$이어야 한다.

따라서, (나) 조건에 의해 다음 그림과 같이



$f(1)f(\frac{3}{2}) < 0$, $f(5)f(6) < 0$, $f(8)f(9) < 0$이다.

$a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 6$, $a_3 = 7$, $a_4 = 8$, $a_5 = 9$,

$a_6 = 9$, $a_7 = \frac{49}{4}$, $a_8 = 16$, $a_9 = 13$, $a_{10} = 14$ 이므로

$4 \times \sum_{n=1}^{10} a_n = 383$이다.

답: 383

#21. $\overline{AD}=\overline{A'D}$이므로 $\angle AA'D=67.5^\circ$
점 E에서 세 점 A, A' E를 지나는 원 O에 그은 접선이
선분 AB와 만나는 점을 F라 하자.
선분 CD와 선분 EF가 평행하므로 $\angle ACD=\angle AEF$
원 O에 내접하는 삼각형 $AA'E$와 점 E에서 원 O에 그은 접선의 관계에서
$\angle AEF=\angle AA'D=67.5^\circ$ 임을 알 수 있다. $\therefore\ \angle ACD=67.5^\circ$
삼각형 ADC에서 $\overline{AD}=\overline{AC}$이므로 $\angle BAC=45^\circ$ 이다.

$\overline{AD}=\overline{AC}=\alpha$, $\overline{BD}=\beta$라 하면 (나) 조건에서 $\alpha(\alpha+\beta)=2+\sqrt{2}$ $\cdots\cdots$ ⓐ
삼각형 ABC에서 코사인 법칙을 이용하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\angle BAC\\&=(\alpha+\beta)^2+\alpha^2-2\alpha(\alpha+\beta)\times\cos 45^\circ=(2-\sqrt{2})\times\alpha(\alpha+\beta)+\beta^2\ \text{(ⓐ를 대입)}\\&=\beta^2+2\end{aligned}$$

$\overline{BC}:\overline{BD}=\sqrt{\beta^2+2}:\beta=\sqrt{17}:1$이므로 $\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

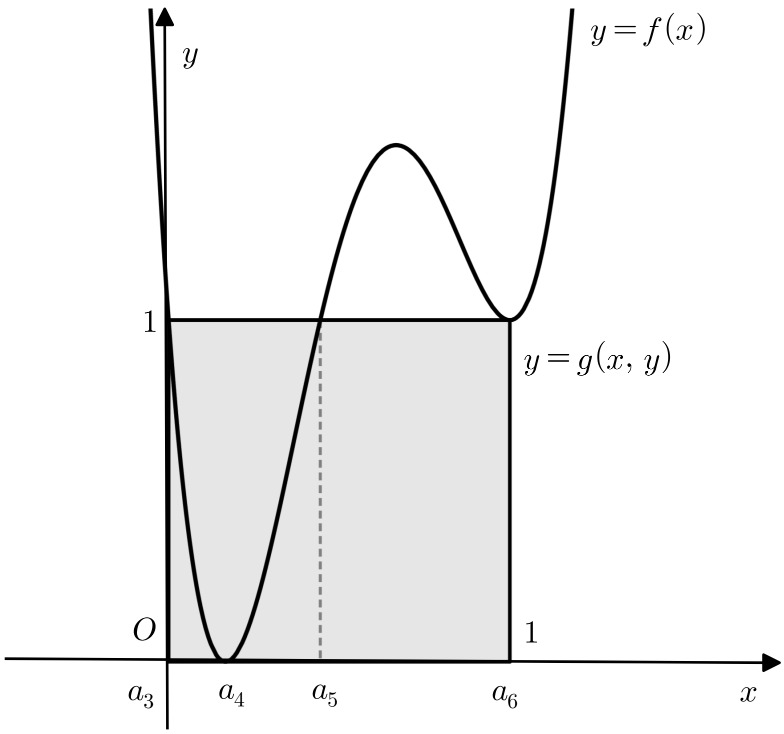
따라서, $\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{34}}{4}$

$\angle BAC=45^\circ$ 임을 이용하여 사인법칙으로 계산하면
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$이므로 넓이는 $\dfrac{17}{16}\pi$이다.

$k=\dfrac{17}{16}$이므로 $32k=34$

답: 34

#22. 함수 $f(x)$와 도형 $g(x, y)$가 조건을 만족시키기 위해선 그림이 다음과 같아야 한다.



$a_3 = 0$, $a_5 = \dfrac{4}{9}$, $a_6 = 1$이므로

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 할 때,

$$f(x) = px\left(x - \frac{4}{9}\right)(x-1)^2 + 1$$

함수 $y = f(x)$의 그래프가 $x = a_4$에서 x축에 접하고

$$f'(x) = \frac{2}{9}p(6x-1)(3x-2)(x-1)\text{이므로}$$

$a_4 = \dfrac{1}{6}$, $f\left(\dfrac{1}{6}\right) = 0$이다. 따라서, $p = \dfrac{3888}{125}$

$f(a_5) = 1$, $f'(a_5) = \dfrac{64}{15}$　　$\therefore\ f(a_5) + f'(a_5) = \dfrac{79}{15}$

$p + q = 94$이다.

답: 94

#23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)=1$이다.

답: ②

#24. 증가함수이려면 $\{(x^2-6x+k)e^x\}'=(x^2-4x+k-6)e^x$에서
모든 실수 x에 대하여 $(x^2-4x+k-6)e^x \geq 0$을 만족해야 한다.
실수 전체의 집합에서 $e^x>0$이므로 $x^2-4x+k-6 \geq 0$을
만족하는 실수 k값의 범위는 방정식 $x^2-4x+k-6=0$의
판별식 $\frac{D}{4}=2^2-(k-6) \leq 0$에서 $k \geq 10$임을 알 수 있다.
따라서, 실수 k의 최솟값은 10이다.

답: ③

#25. 현의 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi k}{n}$이므로

$$r_k = 2\sin\frac{\pi k}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}{r_k}^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}4\sin^2\frac{\pi k}{2n}$$

$$= 4\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-1}\sin^2\frac{\pi k}{2n} = 4\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = 4\int_0^1\frac{1-\cos 2\pi x}{2}\,dx$$

$$= 4\times\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1 = 2$$

답: ④

#26. x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 반원의 반지름의 길이가 $\dfrac{\ln x}{2x}$이므로 입체의 부피는

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{2x}\right)^2\pi\,dx=\frac{\pi}{8}\times\left\{\left[-\frac{(\ln x)^2}{x}\right]_1^e+2\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\,dx\right\}$$

$$=\frac{\pi}{8}\left\{-\frac{1}{e}+2\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e+2\int_1^e\frac{1}{x^2}\,dx\right\}=\frac{\pi}{8e}(2e-5)$$이다.

답: ①

#27. 선분 AB_1의 중점을 원점으로 하고,

점 A와 점 B_1이 x축 위에 있도록 좌표평면을 설정하자.

$\overline{OB_1}=1$이므로 점 B_1의 좌표는 $(1,0)$

$\angle B_2OC_1=2\theta$이므로 점 B_2의 좌표는 $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$

$\overline{AB_2}=\overline{AC_1}=2\cos\theta$이므로 $\overline{OC_1}=2\cos\theta-1$

삼각형 OC_1D_1에서 피타고라스의 정리를 이용하면 $\overline{C_1D_1}=2\sqrt{-\cos^2\theta+\cos\theta}$

따라서, 점 D_1의 좌표는 $(2\cos\theta-1, 2\sqrt{-\cos^2\theta+\cos\theta})$

점 B_1, 점 B_2, 점 D_1의 좌표를 이용하여 계산하면

$S_1(\theta)=(1-\cos 2\theta)\times\sqrt{-\cos^2\theta+\cos\theta}-\sin 2\theta\times(1-\cos\theta)$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1(\theta)}{\theta^3}=\sqrt{2}-1$$

$\overline{AB_2}=2\cos\theta$ 이므로 등비수열 $\{S_n(\theta)\}$의 공비는 $\cos^2\theta$이다.

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}S_n(\theta)=\frac{S_1(\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}S_n(\theta)=\lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1(\theta)}{\theta\times(1-\cos^2\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{S_1(\theta)}{\theta^3}}{\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2}}=\sqrt{2}-1$$

답: ①

#28. 함수 $y=g(t)$는 다음과 같다.

i) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t>1) \\ 1 & (t=1) \\ 2 & (-1<t<0) \\ 3 & (t=-1) \\ 4 & (t<-1) \end{cases}$$

ii) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때

$$g(t)=\begin{cases} 4 & (t>1) \\ 3 & (t=1) \\ 2 & (-1<t<1) \\ 1 & (t=-1) \\ 0 & (t<-1) \end{cases}$$

따라서, **ㄱ**과 **ㄴ**은 **참**이다.

함수 $y=f(x)-t$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의
교점의 개수가 5이려면
함수 $y=f(x)-t$의 최고차항의 계수가 양수이고,
$f(-1)-t=3$, $f(1)-t=1$, $f'(1)<0$이다.
$f(x)-t=a(x-b)^2$ $(a>0)$이라 하고, 계산하면
$a=\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})$, $b=2+\sqrt{3}$이므로 $f'(0)=-1$이다.
따라서, **ㄷ**은 **참**이다.

답: ⑤

#29. 조건 (가)에서

함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 갖는다.

$$\{f(f(x))\}'=f'(f(x))\times f'(x)$$

이므로 (나) 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

ⅰ) $f(-k)<-k$, $f(3k)=-k$, $f(5k)=k$일 때

$f'(x)=3p(x+k)(x-k)$이므로 $f(x)=px^3-3pk^2x+C_1$ (C_1은 적분상수)

$\begin{cases} f(3k)=18pk^3+C_1=-k \\ f(5k)=110pk^3+C_1=k \end{cases}$ 임을 연립하여 계산하면 $46pk^2=1$

$p=\dfrac{1}{46k^2}$이므로 $100<46k^2\leq 1000$을 만족시키는 자연수 k의 값은 2, 3, 4

$k=2$일 때 $f(-2)=-\dfrac{62}{23}<-2$, $k=3$일 때 $f(-3)=-\dfrac{93}{23}<-3$

$k=4$일 때 $f(-4)=-\dfrac{124}{23}<-4$ $\quad\therefore$ k의 값은 2, 3, 4이다.

ⅱ) $f(k)>k$, $f(-5k)=-k$, $f(-3k)=k$일 때

$f'(x)=3p(x+k)(x-k)$이므로 $f(x)=px^3-3pk^2x+C_2$ (C_2는 적분상수)

$\begin{cases} f(-5k)=-110pk^3+C_2=-k \\ f(-3k)=-18pk^3+C_2=k \end{cases}$ 임을 연립하여 계산하면 $46pk^2=1$

$p=\dfrac{1}{46k^2}$이므로 $100<46k^2\leq 1000$을 만족시키는 자연수 k의 값은 2, 3, 4

$k=2$일 때 $f(2)=\dfrac{62}{23}>2$, $k=3$일 때 $f(3)=\dfrac{93}{23}>3$

$k=4$일 때 $f(4)=\dfrac{124}{23}>4$ $\quad\therefore$ k의 값은 2, 3, 4이다.

따라서, 모든 k의 값의 합은 9이다.

답: 9

#30. $f(x)=ax^2+bx+1$이라 하면 x에 대한 방정식 $ax^2+bx+1=0$은 서로 다른 두 양근 α와 β를 갖는다. 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$이므로 $a>0$, $b<0$이다.

양의 실수 t에 대하여 점 $(t, f(t))$에서 포물선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)=(2at+b)(x-t)+at^2+bt+1$이다.

$\therefore\ g(t)=-at^2+1$

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)\}^{\frac{t}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(ax^2+bx+1)^{\frac{t}{x}}$에서 $x\to0$일 때, $(ax^2+bx)\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}(ax^2+bx+1)^{\frac{1}{ax^2+bx}\times(ax+b)t}=e^{bt}$이다.

$\therefore\ h(t)=e^{bt}$

t에 대한 방정식 $g(t)=h(t)$를 만족시키는 t의 값을 m이라 하면

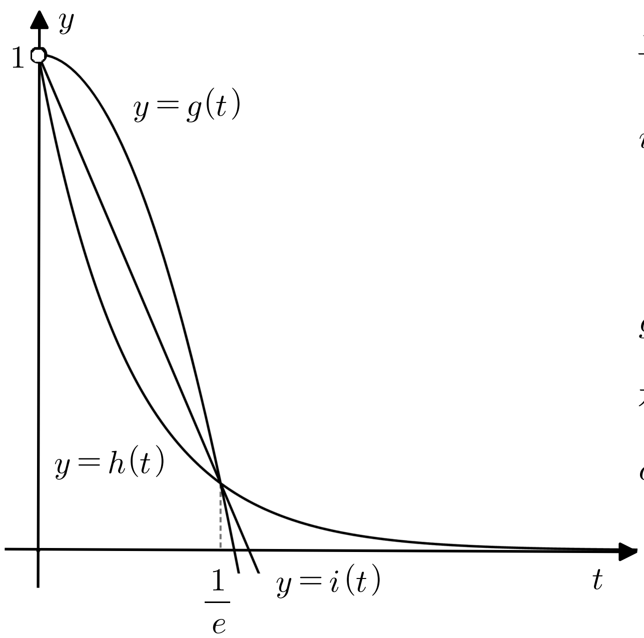
$0<t<m$에서 $g(t)>h(t)$, $t>m$에서 $g(t)<h(t)$이다.

주어진 조건에서 $\{g(t)-i(t)\}\{h(t)-i(t)\}\le 0$이므로

$0<t<m$에서 $h(t)<i(t)<g(t)$, $t>m$에서 $g(t)<i(t)<h(t)$이고 $m=\dfrac{1}{e}$이다.

'squeeze theorem' 에 의하여 $\lim\limits_{t\to0+}h(t)=\lim\limits_{t\to0+}g(t)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0+}i(t)=1$

$\lim\limits_{t\to m-}h(t)=\lim\limits_{t\to m-}g(t)$, $\lim\limits_{t\to m+}g(t)=\lim\limits_{t\to m+}h(t)$이므로 $g(m)=i(m)=h(m)$이다.



주어진 조건에서 함수 $y=i(t)$의 그래프가 점 $(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, 0)$을 지나므로

$i(-\dfrac{b}{2a})=0$

$\therefore\ i(t)=\dfrac{2a}{b}t+1$

$g(\dfrac{1}{e})=i(\dfrac{1}{e})=h(\dfrac{1}{e})$임을 이용하여

계산하면 $a=e^2-1$, $b=-2e$이므로

$\alpha=\dfrac{1}{e+1}$, $\beta=\dfrac{1}{e-1}$이다.

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=2$

답: 2