정적분 테크닉

著 : 雀 (ver. 20230722)
sukita1729@gmail.com

(1) 각변환

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cot\theta$
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cot\theta$

(2) 덧셈정리

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\quad(1\mp\tan\alpha\tan\beta\neq 0)$

(3) 배각공식

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\quad(1-\tan^2\alpha\neq 0)$
$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
$\tan 3\alpha=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\quad(1-3\tan^2\alpha\neq 0)$

(4) 반각공식

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

(5) 곱을 합 또는 차로 고치는 공식

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

(6) 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(7) 삼각함수의 합성

$$a\sin\theta+b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right),\ \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}-\alpha$$

(8) 삼각함수 항등식

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta+1 = \sec^2\theta$$

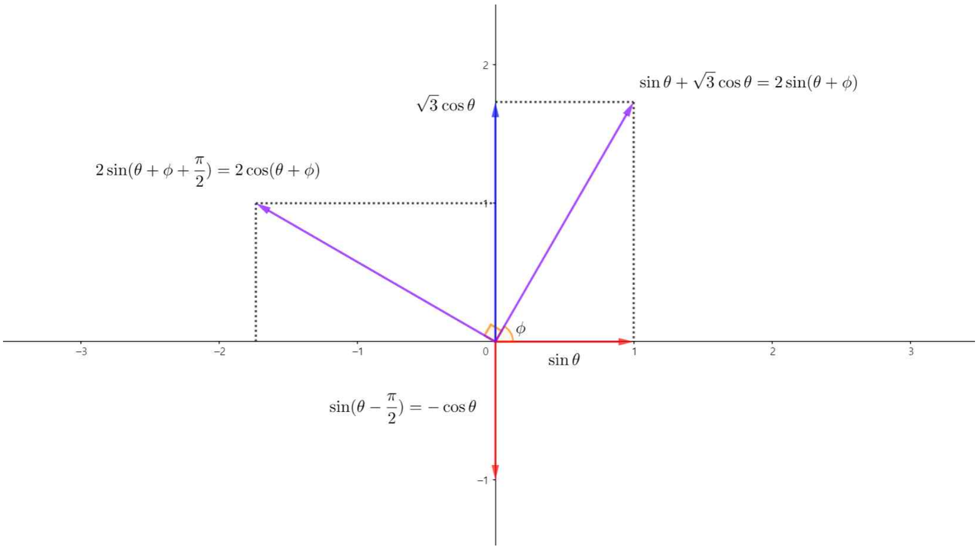
$$\cot^2\theta+1 = \csc^2\theta$$

(9) 부정적분과 미분

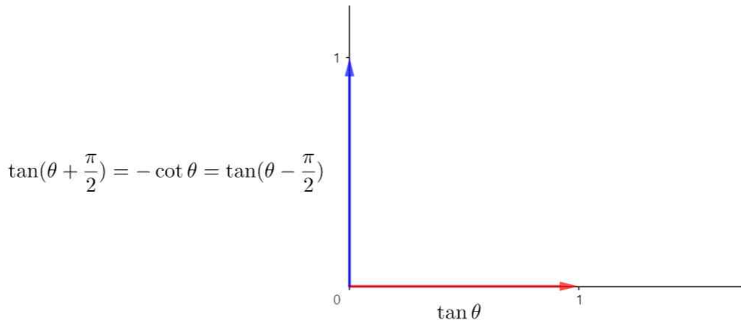
① $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

② $\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x)+C$

(10) 삼각함수 위상자(Phasor)



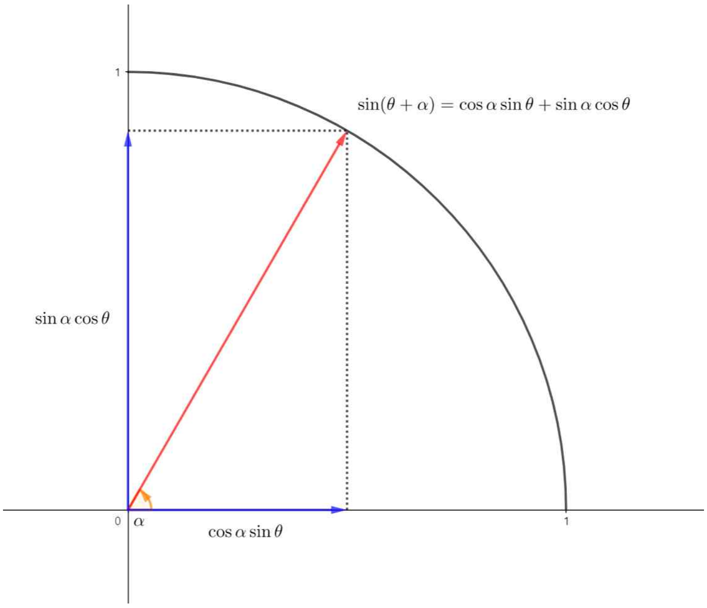
- x축의 양의 방향을 sin축, y축의 양의 방향을 cos축으로 설정하여 삼각함수의 위상을 벡터로 표현한다.
- 각이 더해질 경우 위상자는 길이는 유지된 채 반시계방향으로 회전한다.
- 위상자가 표현하는 삼각함수의 계수는 그 위상자의 길이로 표현된다.
- 서로 다른 두 위상자를 벡터합하면 이는 각 위상자가 표현하는 삼각함수의 합성과 같다. 가령, 위 사진에서 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta+\phi)$이고 $\phi = \frac{\pi}{3}$이다.
- $\sin\theta$ 위상자를 시계방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전시키면 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$이며, 이는 $-\cos$축이므로 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$이다.
- sin을 csc로, cos을 sec로 바꾸면 csc와 sec에 대한 각변환이 가능하나 덧셈정리와 합성은 성립하지 않는다. 즉, $\csc\theta + \sqrt{3}\sec\theta = 2\csc(\theta+\phi)$는 성립하지 않는다.



- tan와 $-\cot$의 경우 위와 같이 xy평면의 제 1사분면만을 이용하여 도시할 수 있다. 이 경우 주기가 π이므로 시계방향으로 회전하는 경우 돌아간 각도를 $\frac{3}{2}\pi$가 아닌 $\frac{\pi}{2}$로 본다.

(11) 삼각함수 위상자의 활용

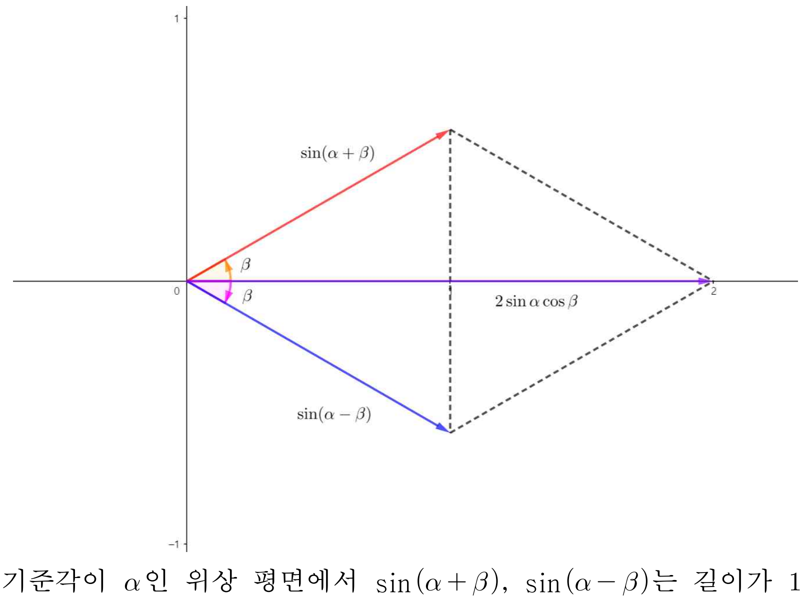
- 삼각함수 위상자를 사용하면 (1), (2), (5), (6), (7)의 공식들은 모두 증명 가능하다. 이에 대한 예시로 (2)와 (5)의 첫 번째 공식의 증명을 제시해 놓는다.



그림과 같은 단위원에서 $\sin(\theta+\alpha)$는 $\sin\theta$축에서 길이 1인 위상자가 각도 α만큼 회전한 것이다. 따라서 위상자의 종점에서 sin축, cos축에 각각 수선의 발을 내리면 원점을 시점으로 하고 두 수선의 발을 종점으로 하는 두 위상자의 길이는 각각 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$이다. 즉 처음의

$\sin(\theta+\alpha)$ 위상자(빨간색)를 sin축 성분과 cos축 성분의 두 위상자(파란색)로 분해할 수 있고

이들의 길이는 각각 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$이므로, $\sin(\theta+\alpha) = \cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta$가 성립한다.



그림과 같이 기준각이 α인 위상 평면에서 $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$는 길이가 1인 $\sin\alpha$축 위

상자가 각각 β, $-\beta$만큼 회전한 것이다. 따라서 이들을 합성한 보라색 위상자는 $\sin\alpha$축으로 길이가 $2\cos\beta$인 위상자이므로 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$이고 증명이 완료되었다.
이와 비슷한 방법으로 (1), (2), (5), (6), (7)의 공식들을 모두 증명할 수 있다.

(12) 부정적분의 기본 성질

① $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k\in\mathbb{R})$

② $\int \{f(x)\pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (복부호동순)

(13) 치환적분법

① $g(x)=t$일 때, $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

② $\int f(x)dx = F(x)+C$일 때, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

③ $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

④ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

(14) 바이어슈트라스 치환 (Weierstrass Substitution)

- 바이어슈트라스 치환은 삼각함수의 유리 적분을 유리식의 적분으로 바꿔주는 치환법이다.

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(15) 오일러 치환 (Euler’s Substitution)

- 오일러 치환은 유리 이변수 함수 R에 대하여 다음과 같은 부정적분을 계산하기 위한 치환법이다.

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$$

[1] 제 1종 오일러 치환
$a>0$일 때,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a}+t,$$

$$x = \frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a}-b}$$

와 같이 치환한다.

[2] 제 2종 오일러 치환
$c>0$일 때,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$$
$$x = \frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$$

와 같이 치환한다.

[3] 제 3종 오일러 치환
방정식 $ax^2+bx+c=0$이 두 실근 α, β를 가질 때,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$
$$x = \frac{\alpha\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$$

와 같이 치환한다.

(16) 부정적분 공식 ($C \in \mathbb{R}$)

1. $\int dx = x + C$
2. $\int a dx = ax + C$ $(a \in \mathbb{R})$
3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $(-1 \neq n \in \mathbb{R})$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$
7. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
11. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
12. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
13. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

14. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

15. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

16. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

17. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

18. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

21. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

22. $\int \sin^{-1} dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$

23. $\int \cos^{-1} x dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$

24. $\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

(17) 헤비사이드 법 (부분분수 분해)

$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x-a_i} = \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{b_n}{x-a_n}$ 일 때

$\frac{f(x)}{(x-a_i)} = h_i(x)$라 하면 $b_i = \frac{g(a_i)}{h_i(a_i)}$가 성립한다. $(1 \le i \le n)$

(18) 부분적분법

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(19) 삼각함수의 거듭제곱의 부정적분 공식 (Reduction Formula)

$n \in \mathbb{N} - \{1\}$,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

(20) 이상적분 (Improper Integration)

- 이상적분은 적분구간의 끝 값이 특정 실수값 또는 $\pm\infty$로 접근할 때의 정적분이다. (양끝 값이 모두 극한으로써 작용할 수도 있다.)

  즉,

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,\quad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx,\quad \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$$

  등과 같은 정적분이다. (Apostol, T (1967), Calculus, Vol. 1 (2nd ed.), Jon Wiley & Sons.) 또한 기호의 남용(abuse of notation)에 의해 적분구간에 $\pm\infty$ 등을 포함하여 쓰기도 한다.

- 예를 들어, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1$이다.

- 또한, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 경우 $x=0$에서 정의되지 않지만 구간 $[0,1]$에서의 이상적분은 정의 가능하다. 즉,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0+}(2-2\sqrt{a})=2$$

  이다. 이상적분을 극한으로 변환하여 계산할 때 극한이 발산하면 이상적분이 발산한다고 하고, 대표적인 예시로 $\dfrac{1}{x}$를 0부터 1까지 적분한 이상적분은 발산한다. 이상적분의 정의에 따른 극한이 수렴할 경우 그 수렴값을 이상적분의 값으로 한다.

- 적분구간의 내점에서 함수가 무한대로 발산하는 등 유계가 아닌 구간이 존재하면, 그 점을 기점으로 적분구간을 쪼갠 후 적분을 진행해야 한다. 예를 들어,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{s\to0-}\int_{-1}^s \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\lim_{t\to\infty}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

$$=\lim_{s\to0-}3(1-\sqrt[3]{s})+\lim_{t\to0+}3(1-\sqrt[3]{t})=3+3=6.$$

- 그러나 이와 비슷한 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$는 0을 기점으로 한 각각의 적분이 모두 발산하므로 동일

한 논리로 계산할 수 없다. (기함수의 적분을 생각하면 직관적으로 0이겠지만 값이 정의되지 않는다.)

(21) 코시 주요값 (Cauchy Principal Value)

- 오귀스탱 루이 코시가 도입한 코시 주요값은 일반적인 정적분으로 값을 구할 수 없는 일부 이상적분의 값을 구하는 방법 중 하나이다.

[def] 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $x=x_0$ 근처에서 발산한다고 하자. 그러면 $a<x_0<b$에서의 적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

는 리만 적분 또는 르벡 적분으로서 그 값이 존재하지 않을 수 있다. 그러나 만약 다음과 같은 극한이 수렴한다면, 이를 코시 주요값으로 정의한다.

$$P\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)dx\right]$$

앞서 언급된 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$는 코시 주요값을 적용하면

$$\lim_{a\to 0+}\left(\int_{-1}^{-a}\frac{1}{x}dx+\int_a^1\frac{1}{x}dx\right)=0$$

과 같이 계산할 수 있다. 코시 주요값은

$$PV\int f(x)dx,\quad \mathrm{p.v.}\int f(x)dx,\quad \int_L^* f(z)dz$$

등으로 표기한다.

(22) Cauchy-Schlömilch Transformation

- Cauchy-Schlömilch Substitution 또는 Cauchy-Schlömilch Transformation은

$$u=x-\frac{1}{x}$$

일 때

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx = PV\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx$$

임을 이용하는 치환이다. ($F(u)du$가 아니라 $F(u)dx$임에 유의하라.)

pf) $u=x-\frac{1}{x}$, $x^2-ux-1=0$에서

$$x_{\pm}=\frac{u\pm\sqrt{u^2+4}}{2} \text{ (복부호동순)}$$

이고

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx=\int_{-\infty}^{0-}F(u)dx_{-}+\int_{0+}^{\infty}F(u)dx_{+}=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)(x_{-}'+x_{+}')du$$

이다. 한편

$$x_{\pm}'=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)$$

이므로 $x_{-}'+x_{+}'=1$이고

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)(x_{-}'+x_{+}')du=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)du$$

이다. (Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.)

(23) Glasser's Master Theorem

- (22)번의 $u=x-\frac{1}{x}$를

$$u=x-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_j}{x-C_j} \quad \cdots \quad [1]$$

로 대체해도

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx=PV\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx \quad \cdots \quad [2]$$

가 성립한다는 것이 알려져 있다. (여기서 $\{a_j\}$는 양의 실수열, C_j는 실수이다.)

pf) 일반성을 잃지 않고 $C_1 < C_2 < C_3 \cdots$라 하자. 이때 식 [1]은 x에 대하여 다음과 같은 n차식으로 환원된다.

$$x^n - \left(u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j\right)x^{n-1} + \ \cdots \ = 0$$

대수학의 기본정리에 의해 이 방정식은 복소 범위에서 (중복을 포함하여) n개의 근을 가지고, n개의 근 $x_i \in \mathbb{C}$ $(1 \le i \le n)$에 대하여 근과 계수의 관계에 의해

$$x_1 + x_2 + \ \cdots \ + x_n = u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j$$

가 성립한다. 따라서

$$x_1{}' + x_2{}' + \ \cdots \ + x_n{}' = 1$$

이고,

$$I = \left(\int_{-\infty}^{C_1^-} dx_1 + \int_{C_1^+}^{C_2^-} dx_2 + \ \cdots \ + \int_{C_{n-1}^+}^{\infty} dx_n\right) F(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_1{}' + x_2{}' + \ \cdots \ + x_n{}')du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)du$$

이다. 이와 같은 논리를 그대로 적용하면 다음과 같은 치환을 적용해도 식 [2]가 성립한다.

$$u = x - \sum_j a_j \cot\left[(x - C_j)^{-1}\right]$$

위 정리를 이용하면 특정한 값으로 수렴하는 아주 복잡한 적분식을 만들어낼 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+1} du = \left[\tan^{-1} u\right]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

이므로

$$u = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

를 대입하여 Glasser's Master Theorem을 적용하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)^2 + 1} dx = \pi$$

이고, 식을 전개하여 짝수차항만 추출하면 다음의 정적분을 얻는다.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{14} - 15x^{12} + 82x^{10} - 190x^8 + 184x^6 - 60x^4 + 16x^2}{x^{16} - 20x^{14} + 156x^{12} - 616x^{10} + 1388x^8 - 1792x^6 + 1152x^4 - 224x^2 + 16} dx = \frac{\pi}{2}$$

이와 같이 복잡한 정적분이 주어졌을 때 Glasser's Master Theorem을 이용하기 위해 식을 변형하여 역추적을 하는 것도 하나의 방법이다. (이를 이용하지 않는다면 복소적분과 매우 복잡한 계산과정을 거쳐야할 것이다.)

예제) Glasser's Master Theorem을 이용하여 다음 식이 성립함을 증명하시오.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^8 - 4x^6 + 9x^4 - 5x^2 + 1}{x^{12} - 10x^{10} + 37x^8 - 42x^6 + 26x^4 - 8x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.

(24) 확장된 Glasser's Master Theorem

- Glasser's Master Theorem의 또 다른 유용한 점은 sum의 끝 범위(n)가 유한할 필요가 없다는 것이다. 즉, $u = x - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{x - C_j}$에서 n이 $+\infty$로 발산하는 무한급수의 형태로 치환이 주어져 있더라도 정리는 여전히 성립한다.

$$\pi \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n} \right)$$

임이 알려져 있으므로 $z = \frac{\pi}{2} - x$를 대입하면

$$\tan x = -\frac{1}{x - \pi/2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + \pi n - \pi/2} + \frac{1}{x - \pi n - \pi/2} \right)$$

을 얻고, 따라서 임의의 적분가능한 함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + \tan x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

이를 이용하면 다음과 같은 absurd한 적분을 아주 쉽게 구할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x+\tan x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\tan^{-1}x]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \tan^{-1}x - \lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}x = \pi$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2(x+\tan x)dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2 x dx = [\tanh x]_0^{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1$$

이를 일반적으로 서술하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

아래 조건을 만족시키는 유리형 함수(Meromorphic Function) $\phi(z)$와
$\mathbb{R}$에서 르벡(Lebesgue) 적분 가능한 함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{\mathbb{R}} f(\phi(x))dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

[조건]

Let $\phi(z)$ be any meromorphic function over $\mathbb{C}$ which

1. preserve the extended real line $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in the sense:

$$\begin{cases} \phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^* \\ \phi^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P \overset{def}{=} \phi^{-1}(\infty) = \{\, p \in \mathbb{C} : p \text{ poles of } \phi(z) \,\} \subset \mathbb{R}$$

2. Split $\mathbb{R} \setminus P$ as a countable union of its connected components $\bigcup_n (a_n, b_n)$. Each connected component is an open interval (a_n, b_n) and on such an interval, $\phi(z)$ increases from $-\infty$ at a_n^+ to ∞ at b_n^- .

3. There exists an ascending chain of Jordan domains $D_1, D_2, \ldots$ that cover $\mathbb{C}$,

$$\{0\} \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \quad \text{with} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbb{C}$$

whose boundaries ∂D_k are "well behaved", "diverge" to infinity and $|z - \phi(z)|$ is bounded on the boundaries. More precisely, let

$$\begin{cases} R_k & \overset{def}{=} & \inf\{\, |z| : z \in \partial D_k \,\} \\ L_k & \overset{def}{=} & \int_{\partial D_k} |dz| < \infty \\ M_k & \overset{def}{=} & \sup\{\, |z-\phi(z)| : z \in \partial D_k \,\} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \lim_{k\to\infty} R_k = \infty \\ \lim_{k\to\infty} \frac{L_k}{R_k^2} = 0 \\ M = \sup_k M_k < \infty \end{cases}$$

(위 정리의 증명은 여기서는 생략하기로 한다. 관심 있는 독자들을 위해 마지막 페이지에 증명을 제시해 놓았다.)

이러한 치환이 성립하는 근본적인 이유는 $\phi(z)$가 $\mathbb{R}$에서 Lebesque measure를 보존하기 때문이며, $\mathbb{R}$에서의 measure-preserving transform의 대표적인 예시가 앞서 살펴본

Glasser's Master Theorem에서의 함수이다.

그러나 위와 같은 확장된 정리는 $\phi(z)$가 만족시켜야 할 조건이 너무나도 많기 때문에 활용 가능성이 낮다. 따라서 조건이 조금 더 간단한 또 다른 확장된 정리를 제시하겠다.

[Letac, 1977]

Let α be a real number and μ be a measure on $\mathbb{R}$ which is singular to the Lebesgue measure and satisfies $\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(d\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty$. Then the function

$$\phi(z) = z - \alpha - \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{z + i\epsilon - \lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) \mu(d\lambda)$$

defines a measurable function on $\mathbb{R}$ that preserves the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$.

Glasser's Master Theorem에서 n이 $+\infty$로 발산해도 무관하다는 시점에서 이미 이 정리의 활용 및 확장 가능성은 무궁무진하다.

[1] Letac, Gérard. "Which Functions Preserve Cauchy Laws?" Proceedings of the American Mathematical Society 67, no. 2 (1977): 277-86. doi:10.2307/2041287.

[2] G. Pólya and G. Szegö. "Problems and Theorems in Analysis" I, II, Problem 118.1 Springer-Verlag, Berlin and New York (1972).

(25) Lobachevsky's Dirichlet Integral Formula

- 연속함수 f가 $0 \le x < \infty$에 대하여 $f(x+\pi) = f(x) = f(\pi - x)$를 만족시킬 때, 즉 f의 주기가 π일 때 리만 이상적분으로써의 적분

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} f(x) dx$$

에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} f(x) dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

- 또한, 이 공식의 확장된 결과로써 다음이 성립한다.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x f(x) dx$$

- 예를 들어, $f(x)=1$을 대입하여 다음 적분을 얻을 수 있다.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

[1] Jolany, H. (2018). An extension of the Lobachevsky formula. Elemente der Mathematik, 73(3), 89-94.

(26) 정적분 테크닉

① 적분 구간을 이용한 치환 ($x \mapsto a+b-x$)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)(-dx) = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

- $f(x)+f(a+b-x)$의 정적분이 쉽게 계산되는 경우

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}dx$$

를 이용하여 정적분을 계산할 수 있다.

② 대칭 치환 ($x \mapsto -x$)

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = \int_{c}^{-c} f(-x)(-dx) = \int_{-c}^{c} f(-x)dx$$

- 이는 ①에서 $a+b=0$인 특수한 경우이지만, 마찬가지로 자주 등장한다.

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = \int_{-c}^{c} \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx$$

(27) 파인만 적분 테크닉 (The Feynman Integration Technique)

- 다음과 같은 적분을 생각하자.

$$I = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

여기서 x는 적분변수이고, a는 상수이다. 따라서 x에 대해 미분 또는 적분을 할 때 a는 관여하지 않는다. 하지만 관점을 조금 바꿔 보면 피적분함수인 e^{ax}를

$$f(x,\, a) = e^{ax}$$

인 이변수함수로 볼 수도 있을 것이다. 이 관점에 따라 위 적분의 양변을 a에 대하여 미분(즉, 편미분) 해보면,

$$\frac{d}{da}\int e^{ax}dx = \frac{\partial}{\partial\, a}\left[\frac{1}{a}e^{ax} + C\right] = -\frac{1}{a^2}e^{ax} + \frac{x}{a}e^{ax} = \frac{(ax-1)e^{ax}}{a^2} \quad \cdots \quad [3]$$

이다. 한편

$$\frac{d}{da}\int e^{ax}dx = \int\left[\frac{\partial}{\partial\, a}e^{ax}\right]dx = \int xe^{ax}dx$$

이고 실제로 이는 [3]의 결과와 일치한다. 리처드 파인만에 의해 유명해진 이 적분법은 다음과 같은 라이프니츠 적분 규칙(Leibniz Integral Rule)의 특수한 경우이다.

$$\frac{\partial}{\partial\, z}\int_{a(z)}^{b(z)} f(x,\, z)dx = \int_{a(z)}^{b(z)}\frac{\partial\, f}{\partial\, z}dx + f(b(z),\, z)\frac{\partial\, b}{\partial\, z} - f(a(z),\, z)\frac{\partial\, a}{\partial\, z}$$

즉, 함수 $f(x,\alpha)$가 α에 대해 미분가능하고 $\dfrac{\partial\, f}{\partial\, \alpha}$가 연속함수이면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\, \alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\, \alpha}f(x,\, \alpha)dx$$

이 테크닉을 이용하면 다음과 같은 특이한 정적분의 값을 구할 수 있다.

$$\phi(a) = \int_0^{\pi}\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx = 2\pi\ln|\alpha| \quad (|\alpha| > 1)$$

이 테크닉을 사용하기 위해서는 피적분함수를 강제적으로 이변수함수로 바꿔야 하므로, 특정 숫자를 α로 바꾸어 매개변수를 강제로 추가하거나 $e^{-\alpha x}$ 등을 곱해 이변수함수로 만들어준 후 $\alpha = 0$일 때의 값을 구하는 식으로 처리한다.

또한 피적분식의 결과를 α에 대하여 미분한 값이 α에 대한 함수로 나오므로 이는 α에 대한 미분방정식을 푸는 것으로 이어진다. (복소적분 외에) 파인만 테크닉을 이용해야 하는 문제들은 그 미분방정식의 해법이 어렵지 않은 것들만 수록하였다.

[1] Feynman, R. P. “A Different Set of Tools.“ In ’Surely You’re Joking, Mr. Feynman!’: Adventures of a Curious Character. New York: W. W. Norton, 1997.

[2] Hijab, O. Introduction to Calculus and Classical Analysis. New York: Springer-Verlag, p. 189, 1997.

[3] Woods, F. S. “Differentiation of a Definite Integral.“ §60 in Advanced Calculus: A Course Arranged with Special Reference to the Needs of Students of Applied Mathematics. Boston, MA: Ginn, pp. 141-144, 1926.

(28) Ramanujan’s Master Theorem

- 복소함수 $f(x)$가

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}(-x)^k$$

과 같은 형태의 MacLaurin Expansion을 가질 때, $f(x)$의 멜린 변환(Mellin Transform)은 다음과 같이 주어진다.

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx = \Gamma(s)\varphi(-s)$$

(단, 여기서 $\Gamma(s)$는 감마 함수이다.)

라마누잔은 이 기법을 이용하여 수많은 정적분과 무한급수의 값을 구했으며, 이 기법을 이용하여 구할 수 있는 특이한 적분 몇 개를 적어보겠다.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\phi} \sin(x^n) dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{\phi+1}{n}\right)\sin\left(\frac{\phi+1}{2n}\pi\right)$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} (\ln x)^m \sin(x^n) dx = \lim_{\phi \to 0} \frac{d^m}{d\phi^m}\left[\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{\phi+1}{n}\right)\sin\left(\frac{\phi+1}{2n}\pi\right)\right]$

2-(2). $\displaystyle\int_0^{\infty} (\ln x)^2 \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{64}(\pi - 4\ln 2 - 2\gamma)^2$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1} \sin x dx = \Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x dx = \Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Li}_s(-x)}{x^{\alpha+1}} dx = -\frac{1}{\alpha^s}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},\ s>0,\ \alpha \in (0,1)$

6. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1} \ln(1+x) dx = \frac{1}{s}\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -x) dx = B(a, s-\alpha)\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(s-\beta)}{\Gamma(s-\gamma)\Gamma(\gamma)}$

8. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_3(-x)}{1+x} x^{s-1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} [\zeta(3) - \zeta(3, 1-s)]$

9. $\int_0^\infty \sin(x^n) dx = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10. $\int_0^\infty \cos(x^n) dx = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$

11. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n} \csc\left(\frac{\pi}{n}\right)$

아래 [2]번 참고문헌에서 더 많은 활용 예시를 찾아볼 수 있다.

[1] Berndt, B. (1985). Ramanujan's Notebooks, Part I. New York: Springer-Verlag.

[2] Qureshi, M. I., Quraishi, K. A., & Pal, R. (2014). Some applications of celebrated master theorem of Ramanujan. British Journal of Mathematics & Computer Science, 4(20), 2862.
(http://www.journalrepository.org/media/journals/BJMCS_6/2014/Jul/Qureshi4202013BJMCS4842_1.pdf)

[3] Mathematical Poetry, *Ramanujan & Feynman*, 2019. 01. 06.
(https://philosophicalmath.wordpress.com/2019/01/06/ramanujan-feynman/)

(29) 역함수의 적분 공식

- 실함수 f와 그 역함수 f^{-1}, $F(x) = \int f(x)dx$에 대하여 다음이 성립한다. (양변을 미분한 후 chain rule을 적용하면 쉽게 증명된다.)

$$\int f^{-1}(x)dx = x \cdot f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + C$$

[증명]

In order to prove this, we split our integral into a sum over the connected components of $\mathbb{R} \setminus P$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(\phi(x))dx = \int_{\mathbb{R}\setminus P} f(\phi(x))dx = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f(\phi(x))dx$$

For any connected component (a_n, b_n) of $\mathbb{R} \setminus P$ and $y \in \mathbb{R}$, consider the roots of the equation $\phi(x) = y$. Using properties (1) and (2) of $\phi(z)$, we find there is a unique root for the equation $y = \phi(x)$ over (a_n, b_n). Let we call this root as $r_n(y)$. Change variable to $y = \phi(x)$, the integral becomes

$$\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{dr_n(y)}{dy} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\sum_n \frac{dr_n(y)}{dy} \right) dy$$

We can use the obvious fact $\frac{dr_n(y)}{dy} \geq 0$ and dominated convergence theorem to justify the switching of order of summation and integral.

This means to prove $(*1)$, one only need to show

$$\sum_n \frac{dr_n(y)}{dy} \stackrel{?}{=} 1 \qquad (*2)$$

For any $y \in \mathbb{R}$, let $R(y) = \phi^{-1}(y) \subset \mathbb{R}$ be the collection of roots of the equation $\phi(z) = y$.

Over any Jordan domain D_k, we have following expansion

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z) - y} = \sum_{r \in R(y) \cap D_k} \frac{1}{z - r} - \sum_{p \in P \cap D_k} \frac{1}{z - p} + \text{something analytic}$$

This leads to

$$\sum_{r\in R(y)\cap D_k} r - \sum_{p\in P\cap D_k} p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k} z\left(\frac{\phi'(z)}{\phi(z)-y}\right) dz$$

As long as $R(y)\cap\partial D_k = \emptyset$, we can differentiate both sides and get

$$\begin{aligned}\sum_{r_n(y)\in D_k} \frac{dr_n(y)}{dy} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k} z\left(\frac{\phi'(z)}{(\phi(z)-y)^2}\right) dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k} z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\phi(z)-y}\right) dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k}\frac{dz}{\phi(z)-y}\end{aligned}$$

For those k large enough such that $R_k > 2(M+|y|)$, we can expand the integrand in last line as

$$\frac{1}{\phi(z)-y} = \frac{1}{z-(y+z-\phi(z))} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(y+z-\phi(z))^j}{z^{j+1}}$$

and obtain a bound

$$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{r_n(y)\in D_k}\frac{dr_n(y)}{dy}\right)-1\right| &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\partial D_k}\frac{(|y|+|z-\phi(z)|)^j}{|z|^{j+1}}|dz|\\ &\le \frac{(M+|y|)L_k}{2\pi R_k^2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{M+|y|}{R_k}\right)^j \le \frac{M+|y|}{\pi}\frac{L_k}{R_k^2}\end{aligned}$$

Since $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{L_k}{R_k^2} = 0$, this leads to

$$\sum_n \frac{dr_n(y)}{dy} = \lim_{k\to\infty}\sum_{r_n(y)\in D_k}\frac{dr_n(y)}{dy} = 1$$

This justifies $(*2)$ and hence $(*1)$ is proved. Notice all the $\frac{dr_n(y)}{dy}$ are positive, there is no issue in rearranging the order of summation in last line.

Back to the original problem of evaluating

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x+\tan x)^2} dx$$

One can take $\phi(z)$ as $z + \tan z$ and $f(x)$ as $\frac{1}{1+x^2}$. It is easy to see $\phi(z)$ satisfies:

- Condition (1) - For any $y \in \mathbb{R}$ and $u + iv \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned}\Im(\phi(u+iv) - y) &= v + \Im \tan(u+iv) = v + \Im \frac{\tan u + i \tanh v}{1 - i \tan u \tanh v} \\ &= v + \tanh v \frac{1+\tan^2 u}{1+\tan^2 u \tanh^2 v} \neq 0\end{aligned}$$

- Condition (2) - obvious.
- Condition (3). - Let D_k to be the square

$$D_k = \left\{ u + vi \in \mathbb{C} : |u|, |v| \le k\pi \right\}$$

It is not hard to show $|z - \phi(z)| = |\tan z|$ is bounded above by $\frac{1}{\tanh k\pi}$ on ∂D_k.

Combine these, we can apply $(*1)$ and deduce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x+\tan x)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$