2024 장시인 모의고사 4회 22번.

다항함수 $f(x)=ax^5+x^4+bx^2+c$는 모든 실수 x에 대하여 $f(f'(x-a))=f(f'(-x-a))$이고, $t=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{x^2+1}{x^4}$일 때 $(-t,t)$에서 $f(x)-f'(x) \geq f(0)-16$이 항상 성립하도록 하는 실수 b가 같은 범위 내에서 $f(x)$의 최솟값이다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a는 정수이다.)

2024 장시인 모의고사 4회 22번 해설.

[출제의도: 함수의 대칭성을 파악하여 주어진 함수의 개형을 추론할 수 있는가?]

주어진 조건을 토대로, $f(x)$와 $f'(x-a)$가 합성된 함수가 우함수의 성질을 지님을 알 수 있다.
즉, 합성함수가 $x=0$에 대칭이므로, 1) 내부 함수가 $x=0$에 대칭이거나 2) 내부 함수가 $(0,k)$에 대칭이고 외부 함수가 $x=k$에 대칭인 상황을 추론할 수 있다.
1) $f'(x-a)=5a(x-a)^4+4(x-a)^3+2b(x-a)$가 $x=0$에 대해 대칭이려면 $2n-1$차 항의 계수가 0이어야 한다. 이때 삼차항의 계수가 $-20a^2+4$로 a가 정수라는 조건에 어긋나므로 모순이다.
2) 내부 함수가 $(0,k)$에 대칭이려면 함수의 $2n$차 항의 계수가 0이어야 한다. 따라서 $a=0$이다.
이때 $f'(x)=4x^3+2bx$이므로 $k=0$이고, 함수 $f(x)=x^4+bx^2+c$는 $x=k=0$에 대하여 대칭이므로 합성함수는 우함수이다.

$t=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^4}$이므로 양의 방향으로 무한히 커진다.
$\therefore(-t,t)$는 모든 실수이다.
$f(x)-f'(x)\geq f(0)-16$이 항상 성립하기 위해서 $f(x)-f'(x)$의 최솟값이 $c-16$보다 크거나 같아야 한다. $f(x)-f'(x)=x^4-4x^3+bx^2-2bx+c$이고 b의 값이 정해지지 않았으므로, x^2-2x의 값을 0으로 만들어 줌으로써 함수 $f(x)-f'(x)$의 정보를 얻을 수 있다.
이때 $f(0)-f'(0)=c$이고 $f(2)-f'(2)=c-16$이므로, $x=2$에서 함수 $f(x)-f'(x)$가 최솟값을 가짐을 알 수 있다. $f(x)-f'(x)$는 다항함수이므로, $x=2$에서 극솟값을 가진다.
$\therefore 4\cdot 2^3-12\cdot 2^2+2b\cdot 2-2b=0$
$\therefore b=8$이다.
함수 $f(x)$가 같은 범위 내에서 $b(=8)$을 최솟값으로 가지므로, $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 최솟값 8을 가진다.
함수 $f(x)=x^4+8x^2+c$이므로 $x=0$에서 극소이자 최소를 갖고, $f(0)=c$이므로 $c=8$이다.
따라서 $a+b+c=0+8+8=16$
정답은 16이다.