1) 정답 : ②

해설 :

준식에서

$$\log_3\sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 3 = \frac{1}{2}$$

이므로

$$4^{\log_3\sqrt{3}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$$

이다.

2) 정답 : ③

해설 :

행렬 A에 대하여

$$A+kE=\begin{pmatrix} 1+k & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$$1+k+2+1+k = 2k+4 = 10$$

이므로

$$k = 3$$

이다.

3) 정답 : ①

해설 :

임의의 실수 θ에 대하여

$$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\frac{3}{4} = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

이고, 따라서

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{8}$$

이다. 또한, $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$이므로

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

이다.

4) 정답 : ③

해설 :

함수

$$f(x) = (x+1)e^{2x}$$

에 대하여

$$f'(x) = (2x+3)e^{2x}$$

이므로

$$f'(0) = 3$$

이다.

5) 정답 : ④

해설 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$a_5 - a_3 = r^4 - r^2 = 2$$

이고

$$r^4 - r^2 - 2 = (r^2-2)(r^2+1) = 0$$

이므로

$$r^2 = 2$$

이다. 따라서,

$$a_7 = r^6 = (r^2)^3 = 2^3 = 8$$

이다.

6) 정답 : ①

해설 :

준식에서 x^2을 t로 치환하면

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\, dt$$

이므로

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이다.

7) 정답 : ④

해설 :

함수 $f(x)$의 $a\sin x$와 $3\cos x$를 합성하면

$$f(x)=\sqrt{a^2+9}\,\sin(x-\theta)-2$$

이므로, 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi+\theta\right)=\sqrt{a^2+9}-2$$

이다. 즉,

$$\sqrt{a^2+9}-2=3$$

이므로,

$$a^2=16$$

이고, a가 양수이므로

$$a=4$$

이다.

8) 정답 : ⑤

해설 :

연립일차 방정식의 해가 없을 조건인

$$\frac{-2}{1-a}=\frac{a}{1}=\frac{1}{a}$$

를 정리하면

$$a=2$$

9) 정답 ①

a_1, a_2를 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합은 10, 두 근의 곱은 24 이므로

$$t^2-10t+24=0 \Leftrightarrow (t-6)(t-4)=0$$

이므로

$$t=6 \text{ 또는 } t=4$$

그런데 공차가 음수라고 했기 때문에

$$a_1=6\ ,\ a=4$$

이고 공차는 -2이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=-30$$

10) 정답 : ①

해설 :

초기 온도가 27℃일 때 반응 속도 상수가 k_0이므로

$$\log k_0=A-\frac{E_0}{273+27}\ \cdots ㉠$$

또한, 초기 온도가 327℃일 때 반응 속도 상수가 $10k_0$이므로

$$\log 10k_0=A-\frac{E_0}{273+327}\ \cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면,

$$\log 10=\frac{E_0}{600}$$

따라서

$$E_0=600$$

이다. 같은 반응에서 초기 온도가 127℃일 때의 반응 속도 상수가 k_1이므로

$$\log k_1=A-\frac{E_0}{273+127}\ \cdots ㉢$$

또한, 초기 온도가 177℃일 때 반응 속도 상수가 k_2이므로

$$\log k_2=A-\frac{E_0}{273+177}\ \cdots ㉣$$

㉣−㉢을 하면,

$$\log\frac{k_2}{k_1}=\frac{E_0}{3600}=\frac{1}{6}\quad (E_0=600\text{이므로})$$

따라서

$$\frac{k_2}{k_1}=10^{\frac{1}{6}},\ k_2=10^{\frac{1}{6}}k_1$$

이므로

$$\alpha=\frac{1}{6}$$

이다.

11) 정답 : ③

해설 :

일차변환 f의 변환행렬을 A라 하면, 역변환 f^{-1}의 변환행렬은 A^{-1}이고, 역변환 f^{-1}에 의하여 점 $(2, 4)$가 (a, b)로 옮겨지므로

$$A^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

이다.

$$A^{-1}=\frac{1}{5-6}\begin{pmatrix}5&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$$a=2\ ,\ b=0$$

이므로

$$a+b=2+0=2$$

이다.

〔별 해〕

$$A^{-1}A=A^{-1}\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

이므로

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

이고, 따라서

$$A^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

이다.

12) 정답 : ②

해설 :

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(1, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다. 또한 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AH}}=3$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2, 2\sqrt{2})$ 이고, $\mathrm{A}(2, 2\sqrt{2})$에서 그은 접선의 방정식은

$$2\sqrt{2}y=2(x+2)\ \Leftrightarrow\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}$$

이므로 x절편은 -2, y절편은 $\sqrt{2}$이다. 따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{2}=\sqrt{2}$$

이다.

13) 정답 : ⑤

주어진 분수부등식을 정리하면

$$(x-n^2)(x-n)\le 0\quad (x\ne n)$$

이다.

이를 만족하는 자연수 x의 개수는 n^2-n개이므로

$$a_n=n^2-n$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}(k^2-k)=70$$

14) 정답 : ③

$a_{n+2}=4+6S_n\ (n\ge 1)$ 을 정리하면 $a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$ ⋯ ㉠

식을 얻을 수 있다. ㉠으로부터 $a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$ 이므로 수열 $\{a_{n+1}+2a_n\}$은 첫 번째 항이 a_2+2a_1 이고, 공비가 3인

등비수열이다. 그러므로 $a_{n+1}+2a_n=\boxed{10\times 3^{n-1}}$ ⋯ ㉡

이다. 또한, ㉠으로부터 $a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$ 므로, 수열 $\{a_{n+1}-3a_n\}$은 첫 번째 항이 a_2-3a_1 이고, 공비가 -2 인 등비수열이다. 그러므로 $a_{n+1}-3a_n=\boxed{-5\times(-2)^{n-1}}$ 이다. ⋯ ㉢

㉡ - ㉢을 정리하면 $a_n=\boxed{2\times 3^{n-1}+(-2)^{n-1}}$ 이다.

$f(n)=10\times 3^{n-1}$, $g(n)=-5\times(-2)^{n-1}$, $h(n)=2\times 3^{n-1}+(-2)^{n-1}$ 이므로 $h(5)+g(4)-f(3)=128$

15) 정답 ②

양변에 x를 곱하면

$$f(x)+xf'(x)=x\sin x$$

$\int f(x)+xf'(x)dx=xf(x)$ 이므로 양변을 적분하면

$$xf(x)=\int x\sin x dx=-x\cos x+\sin x+C$$

$$f(x)=-\cos x+\frac{\sin x}{x}+\frac{C}{x}$$

$x=\pi$를 대입하면

$1=1+\dfrac{C}{\pi}$ 이므로 $C=0$

$\therefore\ f(x)=-\cos x+\dfrac{\sin x}{x}$

$\therefore f(2\pi)=-1$

16) 정답 ⑤

ㄱ. $AB+A^2B=E$ 에서 $A(E+A)B=E$ 이므로 A^{-1} 존재

ㄴ. $A(E+A)B=E$
B^{-1}이 존재하므로
$A(E+A)=B^{-1}$이고 양변에 A를 곱하면 $AB^{-1}=B^{-1}A$
$\therefore\ AB=BA$

ㄷ. $A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)=O$

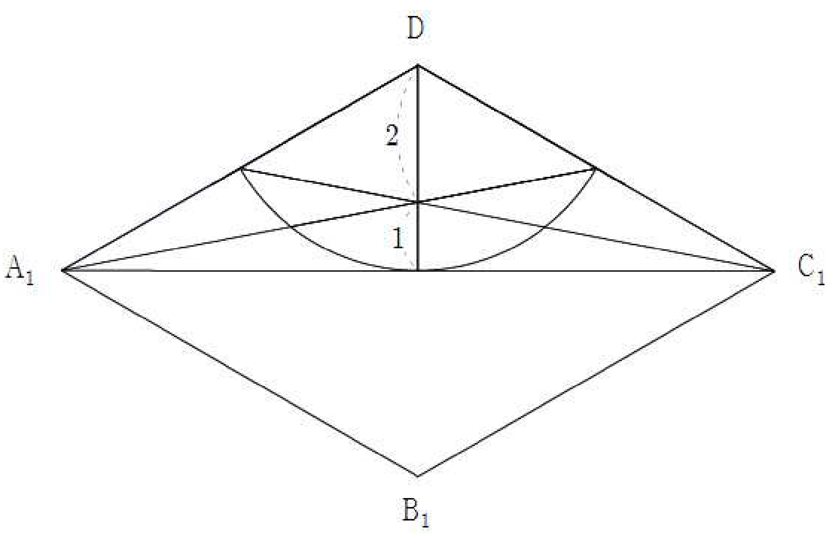
$A+E$의 역행렬이 존재하므로
$A^2-A+E=O$

$A^2=A-E$ 이므로
$AB+A^2B=E$에 대입하면
$AB+(A-E)B=E$
$\therefore\ 2AB=B+E$

17) 정답 : ①

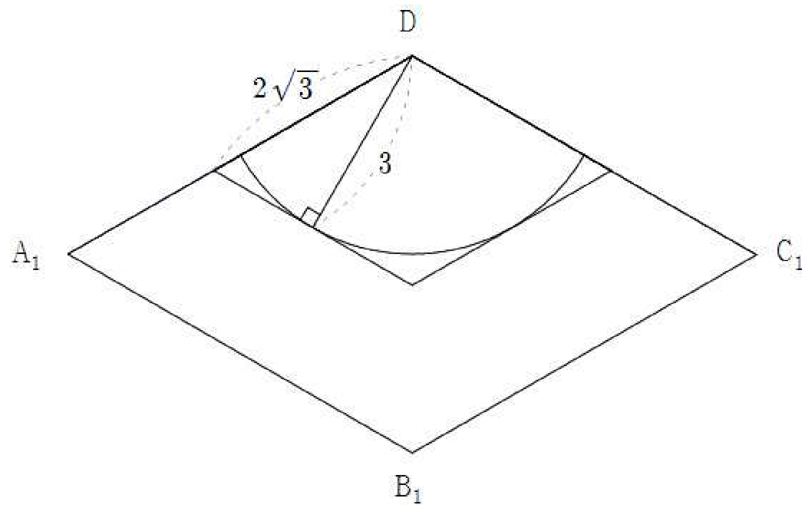
해설 :

R_1의 색칠된 영역의 넓이는 반지름의 길이가 3이고 중심각의 크기가 $\dfrac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 넓이에서 색칠되지 않은 사각형의 넓이를 빼면 된다. 이때 점 $\mathrm{A_1}$과 선분 $\mathrm{C_1D}$의 중점을 이은 선분과 점 $\mathrm{C_1}$과 선분 $\mathrm{A_1D}$의 중점을 이은 선분의 교점은 삼각형 $\mathrm{A_1C_1D}$의 무게중심이므로 아래 그림과 같이 선분을 2:1로 내분하게 된다.



그러므로 색칠되지 않은 사각형의 넓이는 $3\sqrt{3}$이 되고, 색칠된 영역의 넓이는 $3\pi-3\sqrt{3}$이 된다.

한편, 아래 그림과 같이 두 번째 마름모 $\mathrm{A_2B_2C_2D}$의 한변의
길이는 $2\sqrt{3}$이므로 첫 번째 마름모와의 닮음비는
$\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고, 넓이비는 닮음비의 제곱인 $\dfrac{1}{3}$이 된다.



그러므로 구하고자하는 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은

$\dfrac{3\pi-3\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{9\pi-9\sqrt{3}}{2}$ 이 된다.

18) 정답 : ②

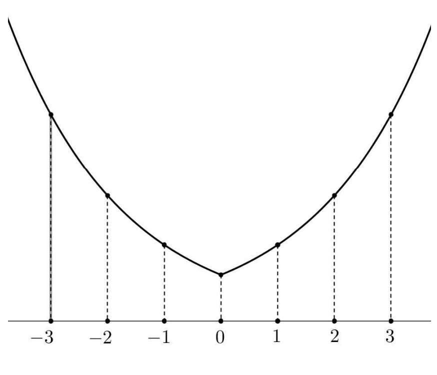
해설 :

$\displaystyle\int_0^1 f(x+a)-f(x+b)dx<0$

$\displaystyle\int_0^1 f(x+a)dx<\int_0^1 f(x+b)dx$

$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)dx<\int_b^{b+1} f(x)dx$

$y=e^{|x|}$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$a=-3$ 일 때, 만족하는 b는 없다.
$a=-2$ 일 때, $b=-3,2$
$a=-1$ 일 때, $b=-3,-2,2,3$
$a=0$ 일 때, $b=-3,-2,2,3$
$a=1$일 때, $b=-3,2$
$a=2$일 때, 만족하는 b는 없다.

∴ 12개

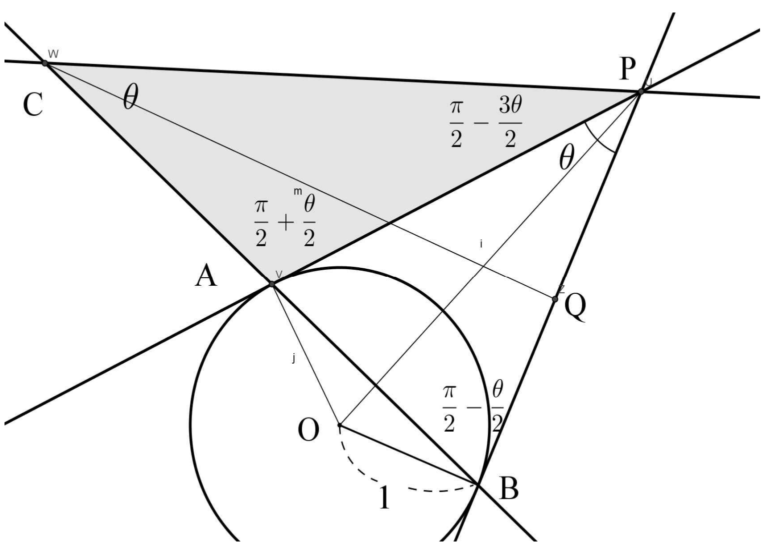
〔별 해〕
정수 a, b를 선택했을 때 나타날 수 있는 여섯 구간의 대소 관계는 다음과 같다.

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_{-3}^{-2} f(x)dx>\int_1^2 f(x)dx=\int_{-2}^{-1} f(x)dx$$
$$>\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx$$

여섯 구간 중 임의로 두 개의 구간을 선택하면 주어진 부등식에 의해 a, b가 결정되고 두 구간의 적분값이 같으면 주어진 부등식이 성립하지 않으므로 ${}_6C_2-3=12$ 이다.

19) 정답 : ②

해설 :



선분AP의 길이는 $\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$

삼각형 CAP에서 사인법칙 또는 CBQ에서 삼각비에 의해

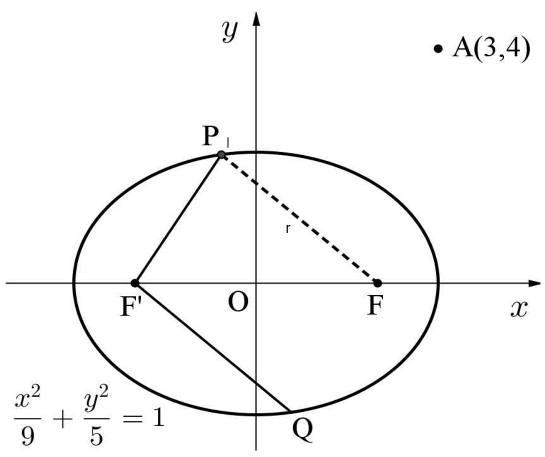
$CP=\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\tan\frac{\theta}{2}}$ (또는 $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta\times\tan\frac{\theta}{2}}$)

$S(\theta)\times\theta^3$은 $\dfrac{1}{2}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\theta}{2}\right)\times\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\tan\frac{\theta}{2}}\times\theta^3$

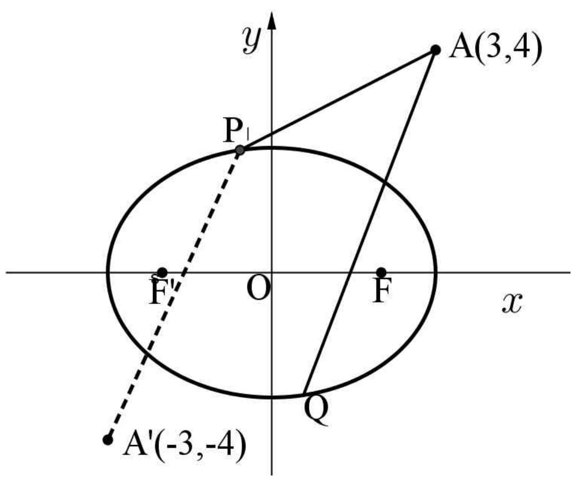
계산하면 극한값은 2

20) 정답 : ⑤

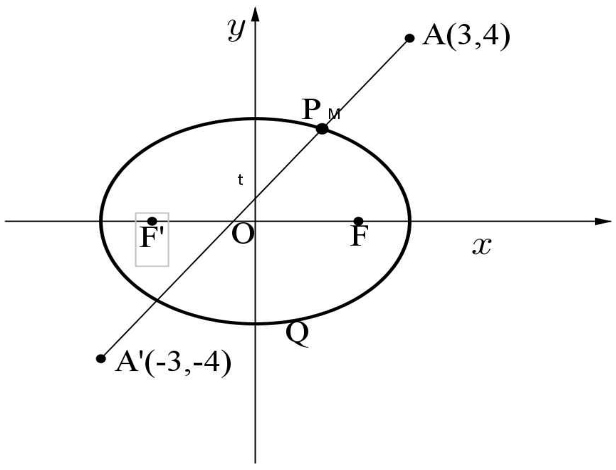
해설 :



Q는 P를 원점 대칭 이동시킨 점이기 때문에 $\overline{QF'}=\overline{PF}$이다.
타원의 정의에 따라 $\overline{PF'}+\overline{QF'}=\overline{PF'}+\overline{PF}=6$
.



점 A를 원점에 대하여 이동시킨 점을 $A'(-3, -4)$이라고 하자.
$\overline{PA'}=\overline{AQ}$이므로 $\overline{PA}+\overline{QA}=\overline{PA}+\overline{PA'}$ 이고 최솟값을 갖을 때 점 A′, P, A가 한직선상에 있고 그 때 그 값은 10이다.



$\therefore$ 4

21) 정답 : ④

해설 :

주어진 조건에 의하여

$f(e)=-e$, $f(-e)=e$, $f'(e)=f'(-e)=\frac{1}{2}$ 이다. 한편

$g'(x)=\left\{\frac{\ln x}{x}+x\right\}'+\left\{\sum_{k=1}^{n}f^{k}(x)\right\}'=\frac{1-\ln x}{x^2}+1+\sum_{k=1}^{n}\{f^{k}(x)\}'$ 이고,

$k\geq 2$ 대하여

$\{f^{k}(x)\}'=\{f(f^{k-1}(x))\}'=\{f^{k-1}(x)\}'f'(f^{k-1}(x))$ 이므로,

$$g'(e)=1-\{f'(e)+f'(e)f'(-e)+f'(e)f'(-e)f'(e)+$$
$$\cdots+f'(e)f'(-e)\cdots f'((-1)^{n-1}e)\}$$

$$=1-\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right\}=1-\left\{\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이 된다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 10^{-10}$의 양변에 상용로그를 취하면,

$-n\log 2\leq -10 \Leftrightarrow n\log 2\geq 10 \Leftrightarrow n\geq 33.33\cdots$ 이므로

자연수 n의 최솟값은 34이다.

22) 정답 : 26

해설 :

$\log_2(x+6)=5 \quad \Leftrightarrow \quad x+6=2^5$

$\therefore\ x=26$

$\log_2(x+6)=5 \quad \Leftrightarrow \quad x+6=2^5$

$\therefore\ x=26$

23) 정답 : 3

해설:

$${}_{n}C_{2}\times{}_{n}H_{2}=\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{(n+1)n}{2}$$
$$=\frac{n^2(n^2-1)}{4}=18$$

$n^2=X$라 하면

$$X^2-X-72=0$$
$$(X+8)(X-9)=0$$
$$X=9$$

$\therefore\ n=3$

24) 정답 : 12

해설 :

일차변환 f를 나타내는 행렬A를 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 주어진 조건으로부터

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+5b=10\cdots ① \\ c+5d=9\ \ \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=p\ \ \cdots ③ \\ c+2d=3\ \ \cdots ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=2\cdots ⑤ \\ -c+d=q\cdots ⑥ \end{cases}$$

①+⑤를 계산하면

$6b=12 \;\therefore b=2, a=0$

②−④를 계산하면

$3d=6 \;\therefore d=2, c=-1$

따라서

$p=a+2b=0+4=4$
$q=-c+d=1+2=3$

$\therefore pq=4\times 3=12$

〔별 해〕

$$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

이므로

$$A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}p\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p+2\\6+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$p=4$, $q=3$

즉, $pq=12$ 이다.

25) 정답 : 5

해설 :

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+2$ ($\because f(1)=2$)

이 직선이 원점을 지나므로

$f'(1)=2$

함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$g(x)=xf(x)$ 이고 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$ 이므로

$g(1)=f(1)=2$, $g'(1)=f(1)+f'(1)=4$

따라서 함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 접선의 방정식은

$y=4(x-1)+2=4x-2$

x절편은 $\dfrac{1}{2}$이므로 $k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 10k=5$

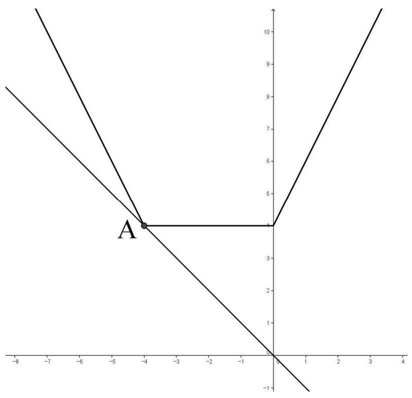
26) 정답 3

무리 방정식 $\sqrt{f(x)+16+|f(x)|}=kx$ 의 실근을 갖지 않으려면,
$y=\sqrt{f(x)+16+|f(x)|}$ 와 $y=kx$의 교점이 없어야 한다.
따라서 $y=\sqrt{f(x)+16+|f(x)|}$ 을 나타내자.

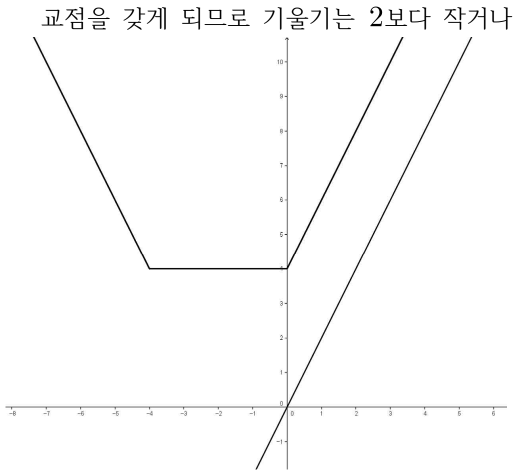
$i)\, f(x)\ge 0$ 일 때,
즉 $x\le -4$ or $x\ge 0$ 일 때, 주어진 식은
$\sqrt{2f(x)+16}=kx$
$\sqrt{4(x+2)^2}=kx$
$2|x+2|=kx$

$ii)\, f(x)<0$ 일 때,
즉, $-4<x<0$ 일 때,
주어진 식은
$4=kx$

아래그림과 같이 $(-4, 4)$를 지날 때 근이 하나 존재하고 그 때의 기울기는 -1이다. 기울기가 -1보다 커지면 주어진 무리방정식의 근이 존재하지 않는다.



기울기가 계속해서 커지다가 $x>0$에서 직선 $y=2x+4$와 평행하게 되면 근이 교점이 존재하지 않는다. 이 때보다 기울기가 커지면 반드시 하나의 교점을 갖게 되므로 기울기는 2보다 작거나 같아야 한다.



따라서 $-1<k\le 2$이고 이 범위안의 정수의 개수는 3개다.

27) 정답 73

해설 :

$\sum_{k=2}^{4}\left(\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$은 상수이므로 이 값을 c라고 하면 주어진 점화식은

$a_{n+1}=a_n\times c$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 c인 등비수열이다.

$\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}=c^2$이고 $\frac{a_{k+1}}{a_k}=c$이므로

$\sum_{k=2}^{4}\left(\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)=\sum_{k=2}^{4}(c^2-c)=3(c^2-c)$ 이다.

$3(c^2-c)=c$ 이므로 $c=\frac{4}{3}$ $(c\neq 0)$

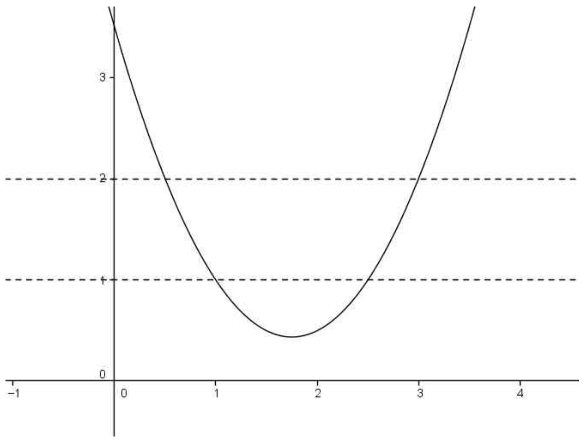
$a_4=a_1\times\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{9}$

$\therefore p+q=73$

28) 정답 : 50

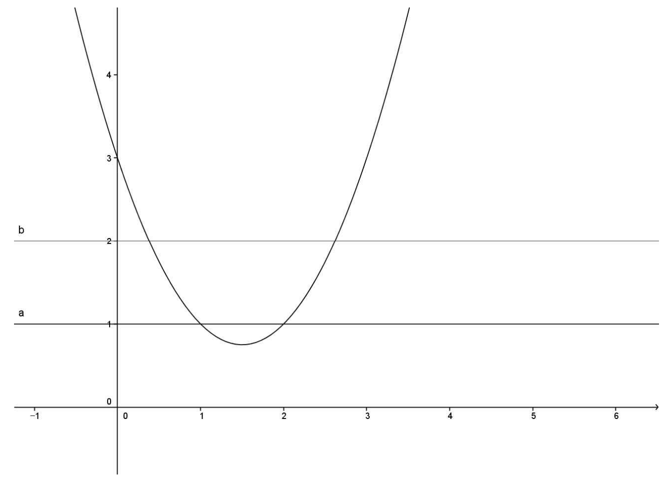
해설 :

$g(x)$는 연속함수 이고 $f(x)$는 $x=1, x=2$에서 불연속이며 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=1$과 $x=2$에서만 불연속이므로 $g(1)=1$ 또는 2이고 $g(2)=1$ 또는 2이다. 다음 그림과 같이 $g(1)$의 값과 $g(3)$의 값이 다르게 되면 합성함수의 불연속점이 3개 이상이 된다.



따라서 $g(1)$의 값과 $g(2)$의 값이 같아야 하는데 $g(1)=g(2)=1$이거나 $g(1)=g(2)=2$이다.

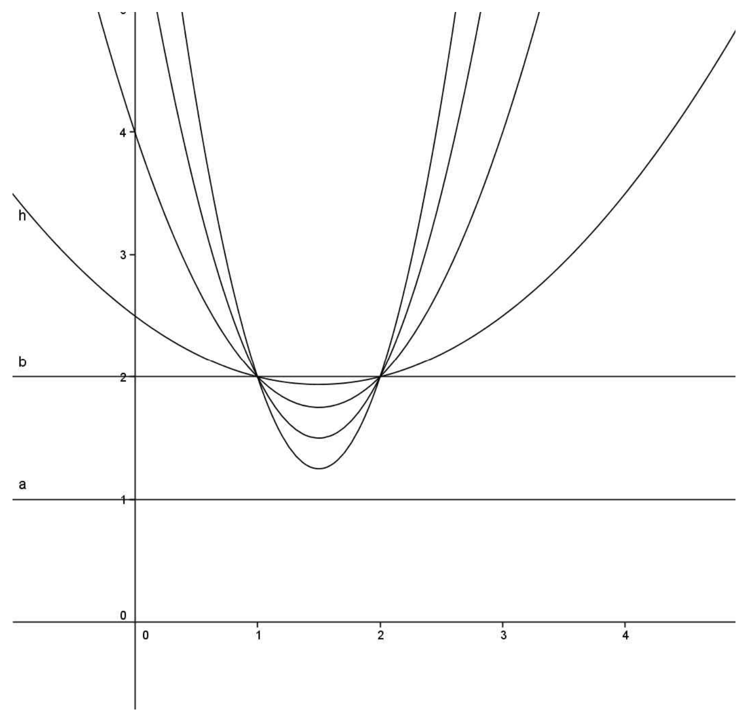
i) $g(1)=g(2)=1$인 경우



위의 그림과 같이 $g(1)=g(3)=1$이면 반드시 $g(x)=2$인 x가 존재하므로 $g(x)=2$인 x에서 또한 합성함수가 불연속이 된다.

ii) $g(1)=g(3)=2$인 경우

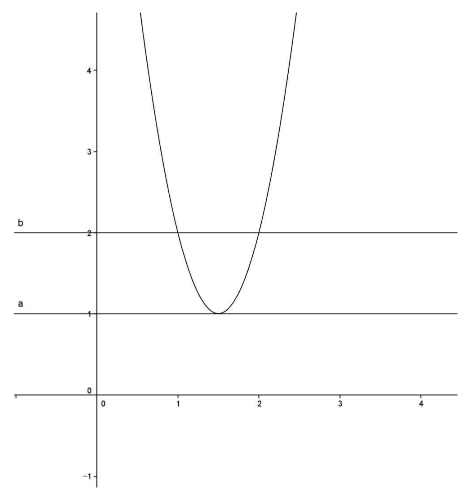
$g(x)=k(x-1)(x-2)+2$ 에서 k의 값에 따라 다음 그림과 같이 함수 $g(x)$의 그래프가 변하게 된다.



k의 값이 커질수록 $g(5)$의 값도 커지므로 $g(x)$가 $y=1$과 만나지 않는 범위에서 k의 최댓값을 찾으면 된다.

이 때, $g(x)$가 직선 $y=1$과 접할 때 $x=\frac{3}{2}$(접점의 x좌표)에서 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 불연속인지를 확인해보자.

$g(x)$와 $y=1$가 접할 때의 $g(x)$는 $g(x)=4(x-1)(x-2)+2$ 이다.



$\lim_{x \to \frac{3}{2}+0} (f \circ g)(x) = f(1+0) = -1$

$\lim_{x \to \frac{3}{2}-0} (f \circ g)(x) = f(1+0) = -1$

$(f \circ g)(2) = f(1) = -1$

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$는 $x = \frac{3}{2}$ 에서 연속이 된다.

$\therefore k \le 4$

$k = 4$일 때, $g(5)$의 값이 최대이므로 $g(5) = 4(5-1)(5-2)+2 = 50$

$g(5)$의 최댓값을 구하는 것이므로 위로 볼록인 이차함수는 고려하지 않아도 된다.

$\therefore g(5)$의 최댓값은 50

29) 정답 : 184

자연수 n에 대하여

$\log n = f(n) + g(n)$
$\log 3n = f(3n) + g(3n)$
$\log 4n = f(4n) + g(4n)$
$\log 5n = f(5n) + g(5n)$ 이라 하자.

$\log 3n = \log 3 + \log n = f(n) + g(n) + \log 3$
$\log 4n = \log 4 + \log n = f(n) + g(n) + \log 4$
$\log 5n = \log n + \log 5 = f(n) + g(n) + \log 5$

ⅰ) $0 \le g(n) < \log 2$
$f(3n) = f(n)$, $f(4n) = f(n)$, $f(5n) = f(n)$,
$f(n) + f(5n) = f(3n) + f(4n)$ (성립)

ⅱ) $\log 2 \le g(n) < \log \frac{10}{4}$
$f(3n) = f(n)$, $f(4n) = f(n)$, $f(5n) = f(n) + 1$ 이므로
$f(n) + f(5n) \ne f(3n) + f(4n)$ (안성립)

ⅲ) $\log \frac{10}{4} \le g(n) < \log \frac{10}{3}$
$f(3n) = f(n)$, $f(4n) = f(n) + 1$, $f(5n) = f(n) + 1$
$f(n) + f(5n) = f(3n) + f(4n)$ (성립)

ⅳ) $\log \frac{10}{3} \le g(n) < 1$
$f(3n) = f(n) + 1$, $f(4n) = f(n) + 1$, $f(5n) = f(n) + 1$

$f(n) + f(5n) \ne f(3n) + f(4n)$ (안성립)

ⅰ),ⅲ) 경우만 성립한다.

$1 \le n \le 1000$ 이므로 $0 \le f(n) \le 3$

$0 \le g(n) < \log 2$, $f(n) = 0 \Rightarrow 1 \le n < 2$ (1개)

$f(n) = 1 \Rightarrow 10 \le n < 20$ (10개)

$f(n) = 2 \Rightarrow 100 \le n < 200$ (100개)

$\log \frac{10}{4} \le g(n) < \log \frac{10}{3}$, $f(n) = 0 \Rightarrow 2.5 \le n < 3.33\cdots$ (1개)

$f(n) = 1 \Rightarrow 25 \le n < 33.33\cdots$ (9개)

$f(n) = 2 \Rightarrow 250 \le n < 333.33\cdots$ (84개)

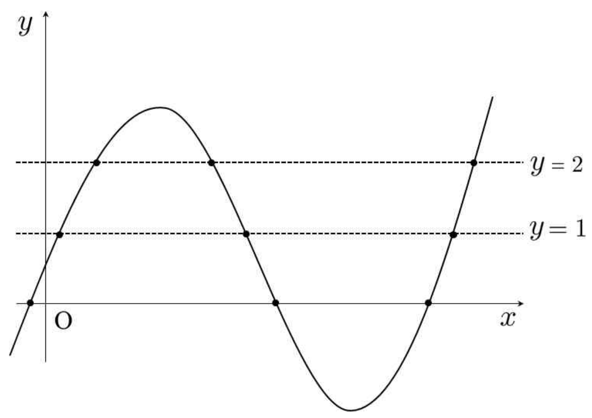
$g(1) = g(10) = g(100)$
$g(11) = g(110)$
$g(12) = g(120)$
$\cdots$
이므로 $1 + 10 + 100 - (1 + 10) = 100$

$g(3) = g(30) = g(300)$
$g(25) = g(250)$
$g(26) = g(260)$
$\cdots$
이므로 $1 + 9 + 84 - (1 + 9) = 84$

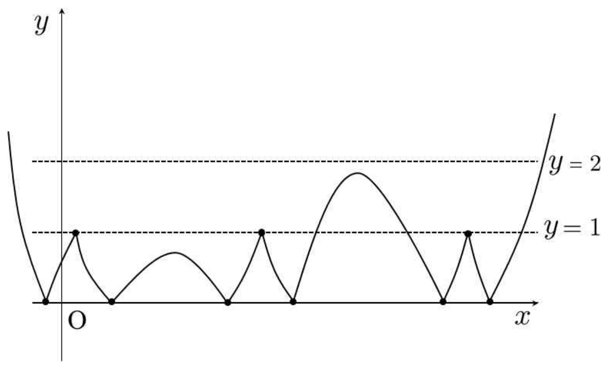
$\therefore\ 100 + 84 = 184$

30) 정답 16

함수 $g(t)$의 개형을 알아보기 위해 삼차함수의 그래프를 하나 그려 본다.

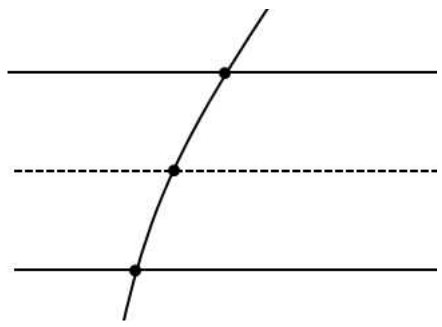


위 그림의 삼차함수에 대하여 함수 $g(t)$의 개형을 찾아보면

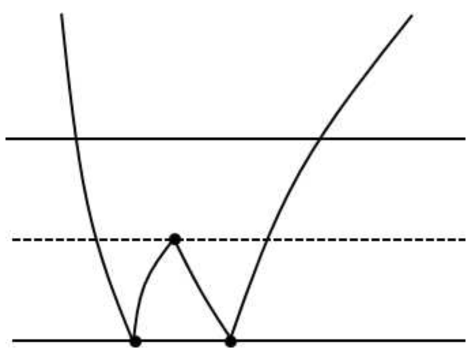


직선 $y=2$와 직선 $y=0$으로부터의 거리가 같은 점들은 $y=1$위에 있기 때문에 결국 $y=0$, $y=1$, $y=2$와 만나는 곳에서 미분불가능한 점이 생긴다는 것을 알 수 있다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수는 최소한 3개의 점에서 아래 그림과 같이 세 직선 $y=0$, $y=1$, $y=2$ 를 뚫고 지나가게 되므로 미분불가능한 점이 최소한 3개 존재한다.

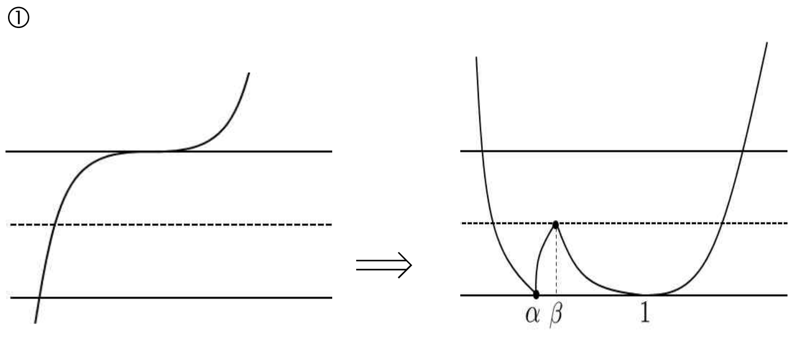


$\Downarrow$

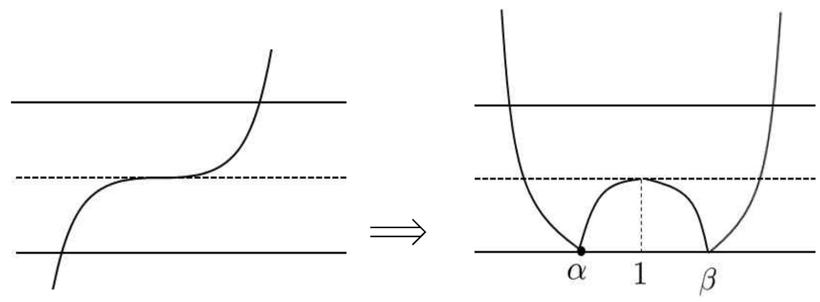


그런데 문제에서 $g(t)$의 미분 불가능한 점이 오직 2개 뿐이라고 했기 때문에 세 직선 $y=0$, $y=1$, $y=2$를 통과할 때 한 점에서는 미분 가능하도록 통과해야 한다. 즉 기울기가 0인 변곡점이 세 직선 $y=0$, $y=1$, $y=2$ 중에 한 곳에 있어야 한다는 뜻이다.

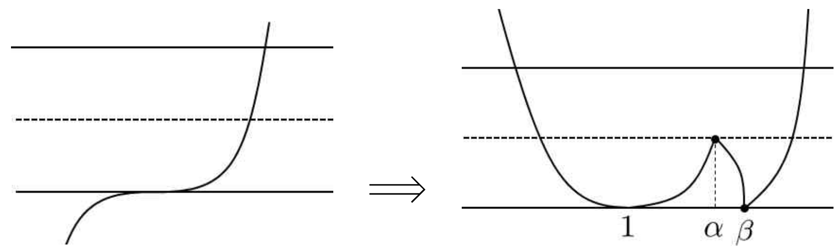
①



②



③



위 세 가지 경우 중에서 ③이 문제의 조건을 충족시키는 상황이다.

$f(x)=(x-1)^3$ 이고 α는 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$과의 교점의 x좌표이고 β는 직선 $y=2$와의 교점의 x좌표이므로 계산하면

$\alpha=2$, $\beta=1+\sqrt[3]{2}$

$\therefore\ (2\beta-\alpha)^3=16$