[뇌풀기] 수학 가형 211220 풀이

#20.

함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$에 대해 정의역은 실수 전체 집합이고, 치역은 집합 $\{0.1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값을 구하시오.

> 함수 $h(x) = f(nx)g(x)$는 실수 집합 전체에서 연속이고,
>
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2, \int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$$
>
> 이다.

문제 상황을 봤을 때, 삼각함수 $f(x)$에 함숫값이 0 또는 1 인 함수가 곱해졌을 때, 실수 전체 집합에서 연속이 돼야 한다고 한다. 그러면 $h(x) = f(nx)$가 되는 구간을 집합 A, $h(x) = 0$이 되는 구간을 집합 B라고 하면, 함수는 $f(nx) = 0$이 되는 모든 곳에서 함수가 바뀌어야 한다. 즉 방정식 $\pi \sin 2n\pi x = 0$이 되는 모든 점에서 함수가 바뀌어야 한다는 것이다.

이 방정식을 풀어보면, $2n\pi x = \cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ 이다. 따라서 함수가 바뀌는 순간은 $x = \cdots, -\frac{2}{2n}, -\frac{1}{2n}, 0, \frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \ldots$이다.

이것을 갖고 그래프를 그려보면, 그래프 한 칸당 넓이가 $\frac{1}{2n}$이고, 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{2n\pi} = \frac{1}{n}$이기 때문에 $x \geq 0, x < 0$에서 그래프 한 칸이 n번씩 각각 그려진다. 따라서 총 넓이가 2다. 연속성 조건만 잘 뚫어낸다면, 위에서 주어진 조건 중 첫 번째 조건은 과조건 (쓸데없는 조건)이었다는 것을 알 수 있다.

그 다음 조건을 처리하는 게 관건이다. 주어진 함수를 각각 정적분하려면 계산이 너무 많아지기 때문에 부정적분부터 하겠다. 부정적분을 하면 $\int \pi x \sin 2n\pi x\, dx = -\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x + \int \left(\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right) dx$다.

각각의 구간에서 정적분을 하면, 먼저 $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$에서는 $-\frac{1}{2n}[\cos 2n\pi x]_0^{\frac{1}{2n}} + \int_0^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\, dx = \frac{1}{2n}$이다.

$xh(x)$에서 $x, h(x)$가 모두 원점 대칭인 함수이기 때문에 $-\frac{1}{n} \leq x \leq -\frac{1}{2n}$에서 정적분을 구하겠다. 그러면 $-\frac{3}{4n}$이 나온다.

이 계산을 반복하면, $\frac{1-3+5-7+\cdots+(4n-3)-(4n-1)}{4n^2} = \frac{-2n}{4n^2} = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$이다. 따라서 $n = 16$.

피드백

0. 사실 이 문제가 실전에서는 너무 어려웠다는 의견이 많지만, 사실 이 문제가 어려운 진짜 이유는 고1 수학 개념에 '함수가 연속이 되는 조건을 잘 알고 있는지'를 아주 집요하게 묻고 있기 때문이다. 즉 도구정리, 행동강령 (유형 정리)에

의존해서 문제를 풀던 많은 수험생들을 저격한 문제라고 보면 된다. 문제를 해석할 생각은 안 하고, 인강으로 체화한 '실전 개념'을 단편적으로 적용해서 풀려고 하니, 문제가 안 풀릴 수밖에. 실제로 평가원은 이 문제를 준킬러로 내려고 했지만 수험생들이 꼬꾸라져서 (…) 자연스럽게 킬러가 된 것이다.

1. 연속성은 A 형 141127 처럼 복잡한 함수로 주어지지 않은 이상 각 구간에서 정의된 함수가 각각 모든 실수에서 정의됐다고 가정할 때 그래프가 만나는 점으로 푼다. 왜냐하면 각 함수가 정의된 구간 안에서는 각각 연속이기 때문이다. 221015 도 정확히 같은 방법으로 풀렸다.